Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Μάθημα: Γεωμετρία

Θεματική Ενότητα: Ανισοτικές Σχέσεις

Θέμα: Αποδείξεις της “τριγωνικής ανισότητας”

Ομάδα εργασίας:

Γιώργος Ρούμελης

Ρωμανός Τζουνάκος

Διονύσης Τσαούσης

Δημήτρης Χαλκίδης

Τμήμα: A_3

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΣΙΩΠΗ ΚΑΛΛΙΟΠΗ

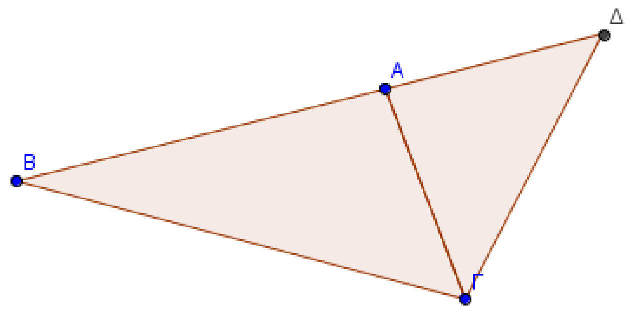
Σχολικό έτος: 2011 - 2012

Η τριγωνική ανισότητα στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Η τριγωνική ανισότητα –ότι, δηλαδή, σε κάθε τρίγωνο η μια πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο- αποτελεί θεμελιώδες θεώρημα στη Γεωμετρία και είναι γνωστό ήδη από την αρχαιότητα. Εκφράζει ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει.

Η τριγωνική ανισότητα συναντάται στα Στοιχεία του Ευκλείδη, Βιβλίο Α΄, Πρόταση κ΄(πρόταση 20^{η}):.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι».	*Σε κάθε τρίγωνο οι δύο πλευρές [μαζί] είναι μεγαλύτερες της τρίτης όπως κι αν μεταβληθούν*



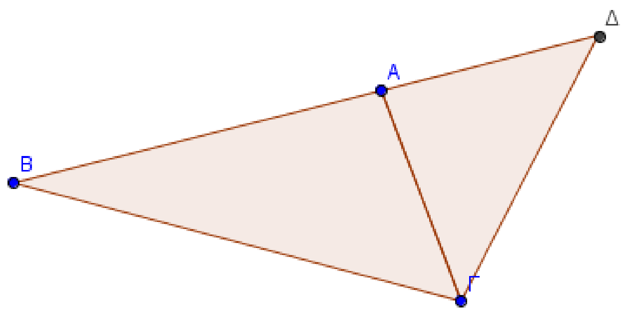
Α) Απόδειξη (πρωτότυπο)	Β) Απόδειξη (μετάφραση της ομάδας)
Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων	Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ οι δύο πλευρές [μαζί] είναι μεγαλύτερες της τρίτης όπως κι αν μεταβληθούν· οι ΒΑ και ΑΓ [μεγαλύτερες] της ΒΓ, οι ΑΒ και ΒΓ της ΑΓ και οι ΒΓ και ΓΑ της ΑΒ. Προεκτείνεται η ΒΑ στο σημείο Δ και δημιουργείται ΑΔ ίση προς τη ΓΑ και φέρεται η ΔΓ. Επειδή η ΔΑ είναι ίση προς την ΑΓ και η γωνία ΑΔΓ προς την

ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	ΑΓΔ, και η ΒΓΔ μεγαλύτερη της ΑΔΓ. Και επειδή το τρίγωνο ΔΓΒ έχει μεγαλύτερη τη γωνία ΒΓΔ από την ΒΔΓ –απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά- η ΔΒ είναι μεγαλύτερη της ΒΓ. Ίση προς τη ΑΓ είναι η ΔΑ. Μεγαλύτερες λοιπόν είναι οι ΒΑ [συν] ΓΑ από την ΒΓ. Ομοίως δείχνεται ότι οι ΑΒ μαζί με την ΒΓ είναι μεγαλύτερες της ΑΓ και οι ΒΓ και ΓΑ της ΑΒ. Επομένως σε κάθε τρίγωνο οι δυο πλευρές [μαζί] είναι μεγαλύτερες της άλλης όπως κι αν μεταβληθούν. Αυτό ακριβώς έπρεπε να δειχθεί.

Η παραπάνω απόδειξη ερμηνεύεται συμβολικά ως εξής:

Από υπόθεση και κατασκευή :ΑΒΓ τρίγωνο, ΑΔ = ΓΑ

Συμπέρασμα: ΒΑ + ΓΑ > ΒΓ



Απόδειξη:

- ΑΔ = ΓΑ => ΑΔΓ γωνία = ΑΓΔ γωνία (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΔ) (1)
- ΒΓΔ γωνία > ΑΔΓ γωνία (από (1) και ΒΓΔ γωνία > ΑΓΔ γωνία) (2)

- ΑΓΔ γωνία = ΑΔΓ γωνία = ΒΔΓ γωνία (3)
- ΒΓΔ γωνία > ΒΔΓ γωνία => ΔΒ > ΒΓ (απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά) (4)
- ΓΑ = ΔΑ και ΔΒ > ΒΓ => ΓΑ = ΔΑ και ΔΑ + ΑΒ > ΒΓ => ΑΒ + ΓΑ > ΒΓ

Ομοίως και για τις άλλες πλευρές του τριγώνου.

Κατά την απόδειξή του ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί προηγούμενους ***ορισμούς (1), αιτήματα (2), κοινές έννοιες(3)*** και ***προτάσεις(3).*** Αυτοί είναι οι ακόλουθοι:

- **Αίτημα α΄:** από κάθε σημείο προς κάθε [άλλο] μπορεί να αχθεί ευθεία (κατασκευή)
- **Αίτημα β΄:** το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί συνεχώς και ευθυγράμμως (κατασκευή)
- **Πρόταση β΄:** να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα με δοσμένο άκρο ίσο προς άλλο δοσμένο (κατασκευή)
- **Ορισμός κ΄:** το τρίγωνο που έχει μόνο δύο πλευρές ίσες ονομάζεται ισοσκελές (ΑΔΓ ισοσκελές τρίγωνο)
- **Πρόταση ε΄:** οι [προσκείμενες] γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες (ΑΔΓ γωνία = ΑΓΔ γωνία)
- **Κοινή έννοια η΄:** το ολόκληρο [μέγεθος] είναι μεγαλύτερο από το μέρος [του] (ΒΓΔ γωνία > ΑΔΓ γωνία)
- **Κοινή έννοια ζ΄:** αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους είναι ίσα (ΑΔΓ γωνία = ΒΔΓ γωνία)
- **Κοινή έννοια α΄:** αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο [μέγεθος] είναι και μεταξύ τους ίσα (ΑΓΔ γωνία = ΒΔΓ γωνία)
- **Πρόταση ιθ΄:** σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία (ΔΒ > ΒΓ)

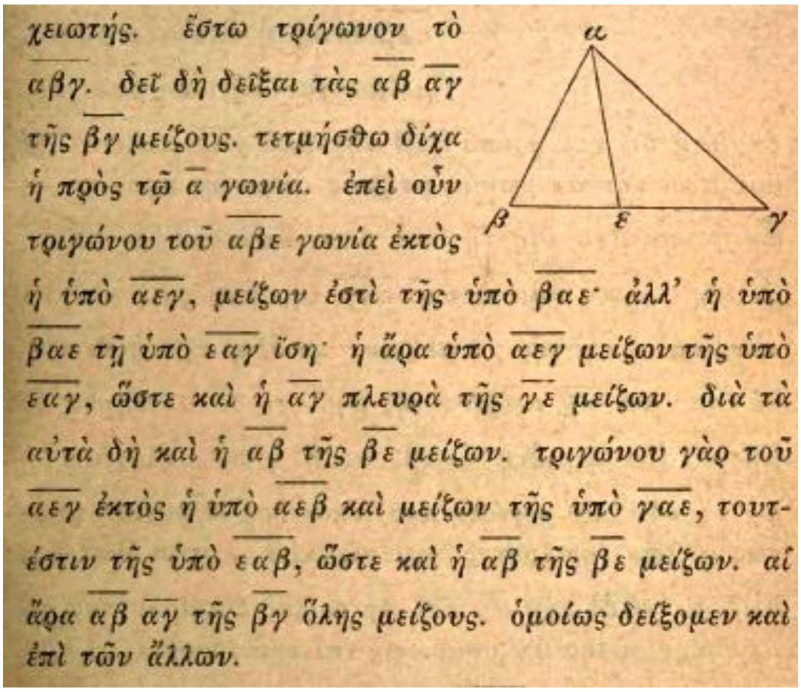
Επικριτές της απόδειξης του Ευκλείδη

Ήδη από την αρχαιότητα η απόδειξη του Ευκλείδη προκάλεσε αντιδράσεις και είχε επικριτές.

Πολλοί κατηγορούσαν τον Ευκλείδη ότι έβγαινε «έξω από το τρίγωνο», ενώ θα μπορούσε να μείνει «εντός του τριγώνου» και προσπάθησαν να δώσουν άλλες αποδείξεις χωρίς να γίνεται προέκταση της πλευράς του τριγώνου. Οι Επικούρειοι έλεγαν ότι η απόδειξη είναι προφανής και για «γάιδαρο» και δεν χρειάζεται σχήμα.

Ο Πρόκλος στο έργο του **Σχόλι'α του** στο α΄ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη παραθέτει τρεις αποδείξεις επικριτών του (μεταξύ των οποίων του Ήρωνα και του Πορφύριου), όπου δεν προεκτείνεται καμιά πλευρά του τριγώνου.

Α) Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας από τον Ήρωνα



χειωτής. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. δεῖ δὴ δεῖξαι τὰς αβ αγ τῆς βγ μείζους. τετμήσθω δίχα ἡ πρὸς τῷ α γωνία. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αβε γωνία ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αεγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαε· ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαε τῇ ὑπὸ εαγ ἴση· ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ μείζων τῆς ὑπὸ εαγ, ὥστε καὶ ἡ αγ πλευρὰ τῆς γε μείζων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αβ τῆς βε μείζων. τριγώνου γὰρ τοῦ αεγ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αεβ καὶ μείζων τῆς ὑπὸ γαε, τουτέστιν τῆς ὑπὸ εαβ, ὥστε καὶ ἡ αβ τῆς βε μείζων. αἱ ἄρα αβ αγ τῆς βγ ὅλης μείζους. ὁμοίως δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

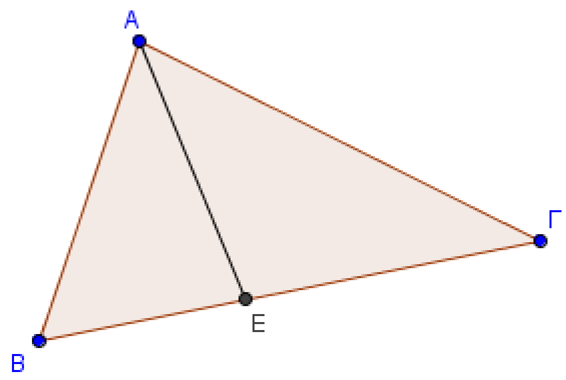
Μετάφραση:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η ΑΒ μαζί με την ΑΓ είναι μεγαλύτερες από την ΒΓ. Διχοτομείται η γωνία Α. Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΑΕΓ είναι εξωτερική είναι μεγαλύτερη από την γωνία ΒΑΕ. Επειδή όμως η γωνία ΒΑΕ είναι ίση με την ΕΑΓ, τότε και η ΑΕΓ είναι μεγαλύτερη από την ΕΑΓ. Άρα η ΑΓ είναι μεγαλύτερη από την ΓΕ. Για τον ίδιο λόγο η ΑΒ είναι μεγαλύτερη από την ΒΕ (Στο τρίγωνο ΑΕΓ η γωνία ΑΕΒ –ως εξωτερική- είναι μεγαλύτερη από την ΓΑΕ, άρα κι απ' την ΕΑΒ). Επομένως οι ΑΒ και ΑΓ είναι μεγαλύτερες από όλη τη ΒΓ. ΜΕ τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και για τις άλλες πλευρές.

Η παραπάνω απόδειξη ερμηνεύεται συμβολικά ως εξής:

Από υπόθεση και κατασκευή: τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΕ διχοτόμος της γωνίας Α

Συμπέρασμα: ΑΒ + ΑΓ > ΒΓ



- ΑΕ διχοτόμος της γωνίας Α και ΒΑΕ γωνία = ΕΑΓ γωνία. (1)
- Στο τρίγωνο ΑΒΕ: ΑΕΓ εξωτερική γωνία => ΑΕΓ γωνία > ΕΑΒ γωνία και ΕΑΒ γωνία = ΕΑΓ γωνία (από (1))=> ΑΕΓ γωνία > ΕΑΓ γωνία=> ΑΓ > ΕΓ (2)
- Στο τρίγωνο ΑΓΕ: ΑΕΒ εξωτερική γωνία => ΑΕΒ γωνία > ΕΑΓ γωνία και ΕΑΒ γωνία = ΕΑΓ γωνία (από (1))=> ΑΕΒ γωνία > ΕΑΒ γωνία=> ΑΒ > ΕΒ (3)
- Από την πρόσθεση των (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει πως ΑΒ + ΑΓ > ΕΓ + ΕΒ =>
- ΑΒ + ΑΓ > ΓΒ

Στην απόδειξη του Ήρωνα χρησιμοποιούνται επίσης προηγούμενες μαθηματικές προτάσεις. Σύμφωνα με την ταξινόμηση των Στοιχείων του Ευκλείδη χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες:

Πρόταση θ΄: να διχοτομηθεί δοσμένη γωνία (κατασκευή)

Πρόταση ις΄: η εξωτερική γωνία κάθε τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του (ΑΕΓ γωνία > ΕΑΓ γωνία)

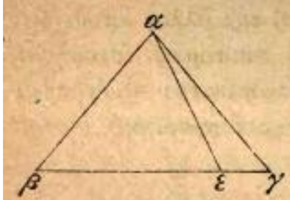
Κοινή έννοια α΄: αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο [μέγεθος] είναι και μεταξύ τους ίσα (πρόσθεση κατά μέλη)

Κοινή έννοια δ΄: αν σε άνισα προστεθούν άνισα προκύπτουν άνισα (πρόσθεση κατά μέλη)

Β) Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας από τον Πορφύριο

Ο Πορφύριος αποδεικνύει –σύμφωνα με τον Πρόκλο- την τριγωνική ανισότητα, χωρίς να προεκτείνει κάποια από τις πλευρές του τριγώνου, διακρίνοντας υποπεριπτώσεις ανάλογα με τις σχέσεις των μηκών των πλευρών του μεταξύ τους.

Πάλιν ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ· εἰ μὲν οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, πάντως αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς — τριῶν γὰρ ἴσων δύο ὁποιαοῦν διπλάσια τοῦ ἑνός — εἰ δὲ ἰσοσκελές, ἤτοι ἐλάσσονα ἔχει τῶν ἴσων ἑκατέρας τὴν βάσιν ἢ μείζονα. εἰ μὲν οὖν ἐλάσσων ἡ βάσις, πάλιν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς· εἰ δὲ μείζων ἡ βάσις, ἔστω ἡ βγ μείζων, καὶ ἀφῃρήσθω ἴση ἑκατέρᾳ ἐκείνων ἡ βε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αεβ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αεγ γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αεβ τῆς ὑπὸ γαε μείζων. αἱ ἄρα περὶ τὴν αε γωνίαι μείζους ὅλης τῆς πρὸς τῷ α, ὧν ἡ ὑπὸ βεα ἴση τῇ ὑπὸ βαε, ἐπεὶ καὶ | ἡ αβ τῇ βε ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ τῆς ὑπὸ γαε μείζων, ὥστε καὶ ἡ αγ τῆς γε μείζων. ἦν δὲ ἡ αβ τῇ βε ἴση. αἱ ἄρα αβ αγ μείζους τῆς βγ. εἰ δὲ σκαληνὸν τὸ αβγ, ἔστω μεγίστη ἡ αβ, μέση ἡ αγ, ἐλαχίστη ἡ βγ. ἡ μὲν οὖν μεγίστη μεθ' ἑκατέρας ληφθεῖσα πάντως μείζων τῆς λοιπῆς· καὶ γὰρ καθ' αὑτὴν ἑκατέρας μείζων. εἰ δὲ τὴν αγ καὶ βγ δεῖξαι ζητοῖμεν τῆς αβ μεγίστης οὔσης μείζονας, ὡς ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς ποιήσομεν ἀπὸ τῆς μεγίστης ἀφελόντες τῇ ἑτέρᾳ ἴσην, καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ γ, καὶ ἀποχρησάμενοι ταῖς ἐκτὸς τῶν τριγώνων γωνίαις.



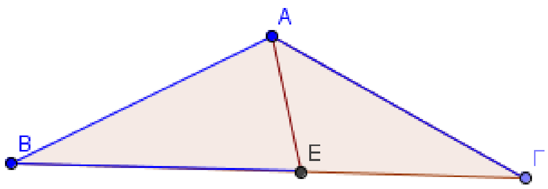
Μετάφραση:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν είναι ισόπλευρο κάθε ζευγάρι πλευρών του είναι μεγαλύτερες της άλλης, επειδή και οι τρεις είναι ίσες και το διπλάσιο είναι μεγαλύτερο του ενός. Αν είναι ισοσκελές ή θα έχει ίσες πλευρές μεγαλύτερες της βάσης, ή μεγαλύτερη τη βάση. Αν βάση ΒΓ είναι μεγαλύτερη οι δυο πλευρές είναι μεγαλύτερες της άλλης. Αν η βάση ΒΓ είναι μεγαλύτερη τότε αφαιρείται [από αυτήν] ίσο [τμήμα] προς τις ίσες [πλευρές], το ΒΕ και φέρεται το ΑΕ. Αφού στο τρίγωνο ΑΕΒ η ΑΕΓ γωνία είναι εξωτερική είναι και μεγαλύτερη της ΒΑΕ. Για αυτό οι γωνίες προσκείμενες στο ΑΕ είναι μεγαλύτερες από όλη την Α όπου η ΒΕΑ είναι ίση με την ΒΑΕ, επειδή η ΑΒ είναι ίση προς ΒΕ. Άρα η ΑΕΓ είναι μεγαλύτερη απ’ τη ΓΑΕ, ώστε και η ΑΓ είναι μεγαλύτερη της ΓΕ. Η ΑΒ είναι ίση προς την ΒΕ. Άρα οι ΑΒ [μαζί με την] ΑΓ είναι μεγαλύτερες από τη ΒΓ. Έστω ΑΒΓ σκαληνό με πιο μεγάλη την ΑΒ, μετά την ΑΓ και πιο μικρή την ΒΓ. Η πιο μεγάλη θα είναι μεγαλύτερη απ’ τις άλλες και θα αποδείξουμε ότι οι ΑΓ [συν την] ΒΓ είναι μεγαλύτερες από την ΑΒ –που είναι κι η μεγαλύτερη- όπως και στο ισοσκελές· θα φέρουμε ίση στη μεγαλύτερη προς την άλλη και ενώνοντας με το Γ χρησιμοποιούμε τις εξωτερικές γωνίες.

Συμβολικά η παραπάνω απόδειξη ερμηνεύεται ως εξής

Υπόθεση: ΑΒΓ τρίγωνο

Συμπέρασμα: Η μεγαλύτερη πλευρά είναι μικρότερη απ’ το άθροισμα των άλλων δύο



1η περίπτωση: ΑΒΓ ισόπλευρο => ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ

ΑΒ < 2ΑΒ => ΑΒ < ΑΒ + ΑΒ => ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ

2η περίπτωση: ΑΒΓ ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και ΑΒ > ΒΓ

ΑΒ < ΑΒ + ΒΓ => ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ

3η περίπτωση: ΑΒΓ ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και ΑΒ < ΒΓ

Κατασκευή: Ε εσωτερικό σημείο του ΒΓ ώστε ΒΕ = ΑΒ και φέρεται το ΕΑ

ΑΒ = ΒΕ => ΒΑΕ γωνία = ΒΕΑ γωνία

Τρίγωνο ΑΕΒ: ΑΕΓ γωνία > ΒΑΕ γωνία

ΒΑΕ γωνία > ΒΑΓ γωνία

[ΒΕ > ΒΓ/2 => ΒΑΕ γωνία > Α/2 γωνία => ΒΑΕ γωνία > ΕΑΓ γωνία =>] ΑΕΓ γωνία > ΕΑΓ γωνία => ΑΓ > ΕΓ => ΑΓ + ΑΒ > ΕΓ + ΑΒ => ΑΓ + ΑΒ > ΕΓ + ΒΕ =>

ΑΓ + ΑΒ > ΓΒ

4η περίπτωση: Στην περίπτωση που το ΑΒΓ είναι σκαληνό τότε η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια της 3ης.

Για την παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες μαθηματικές προτάσεις σύμφωνα με την ταξινόμησή τους στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Ορισμός κ΄: Από τα τρίπλευρα ισόπλευρα είναι αυτά που έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, ισοσκελή αυτά που έχουν μόνο τις δύο ίσες και σκαληνά αυτά που έχουν και τις τρεις άνισες

Κοινή έννοια η΄: το ολόκληρο είναι μεγαλύτερο του μέρους του (περίπτωση 1)

Πρόταση β΄: να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα με δοσμένο άκρο ίσο προς άλλο δοσμένο (κατασκευή)

Αίτημα α΄: από κάθε σημείο προς κάθε [άλλο] μπορεί να αχθεί ευθεία (κατασκευή)

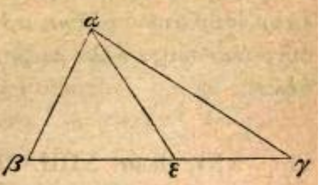
Πρόταση ε΄: οι [προσκείμενες] γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες (ΒΑΕ γωνία = ΒΕΑ γωνία)

Πρόταση ις΄: η εξωτερική γωνία κάθε τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του (ΑΕΓ γωνία > ΒΑΕ γωνία)

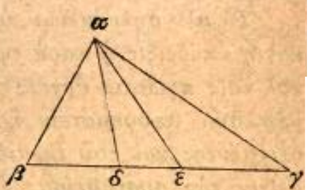
Πρόταση ιθ΄: σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία (ΑΓ > ΕΓ)

Γ) Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο

Πάλιν ἔστω τρίγωνον τυχὸν | τὸ αβγ. λέγω ὅτι αἱ αβ αγ μείζους εἰσὶ τῆς βγ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσαι εἰσίν, ἢ ἐλάσσους, ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ αβ ἴση ἡ βε. λοιπὴ ἄρα ἡ εγ τῇ αγ ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ τῇ βε ἴση, γωνίας ἴσας ὑπο- [illegible]



ἔστωσαν ἐλάσσους αἱ αβ αγ τῆς βγ, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ μὲν αβ ἴση ἡ βδ, τῇ δὲ αγ ἡ γε. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αβ τῇ βδ, ἴση ἡ ὑπὸ βδα τῇ ὑπὸ βαδ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ αγ τῇ γε, ἴση ἡ ὑπὸ γεα τῇ ὑπὸ εαγ· δύο ἄρα αἱ ὑπὸ βδα γεα ἴσαι δυσὶν ταῖς ὑπὸ βαδ καὶ εαγ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αδγ | ἐκτὸς ἡ ὑπὸ βδα, μείζων τῆς ὑπὸ εαγ, καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ δαγ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβε ἐκτὸς ἡ ὑπὸ γεα, μείζων τῆς ὑπὸ βαδ, καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ βαε μείζων. αἱ ὑπὸ βδα γεα μείζους ἐκεῖ δύο τῶν ὑπὸ βαδ εαγ. ἦσαν δὲ καὶ ἴσαι αὐταῖς· ὅπερ ἀδύνατον. αἱ ἄρα αβ αγ οὔτε ἴσαι εἰσὶν τῇ βγ, οὔτε ἐλάσσους, ἀλλὰ μείζους. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.



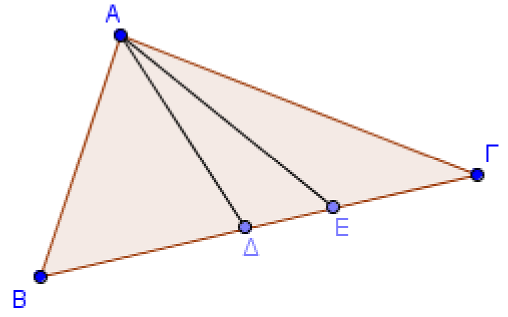
Μετάφραση:

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ ισχυρίζομαι ότι οι ΑΒ [και] ΑΓ είναι μεγαλύτερες της ΒΓ. Αν δεν είναι τότε θα είναι ίσες ή μικρότερες. Αν είναι ίσες, τότε αφαιρείται από την ΑΒ ίση με τη ΒΕ. Άρα η υπόλοιπη ΕΓ είναι ίση με την ΑΓ. Επειδή οι ΑΒ και ΒΕ είναι ίσες τότε και οι απέναντι γωνίες θα είναι ίσες. Όμοια και με τις ίσες ΑΓ και ΓΕ. Άρα οι γωνίες της Ε και της Α είναι ίσες, που είναι αδύνατο. Αν τώρα είναι μικρότερες οι ΑΒ [και] ΑΓ από την ΒΓ, τότε αφαιρείται από την ΑΒ ίση με ΒΔ και από την ΑΓ ίση με ΓΕ. Επειδή λοιπόν οι ΑΒ είναι ίση με τη ΒΔ ίσες είναι κι οι γωνίες ΓΕΑ και ΕΑΓ. Έτσι έχουμε ΒΔΑ ίση με ΒΑΔ και ΓΕΑ ίση με ΕΑΓ. Τώρα στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΒΔΑ είναι εξωτερική είναι πιο μεγάλη από την ΔΑΓ και την ΕΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΓΕΑ είναι μεγαλύτερη της ΒΑΕ και της ΒΑΔ. Άρα οι ΒΔΑ και η ΓΕΑ είναι μεγαλύτερες απ’ τις ΒΑΔ και ΕΑΓ [αντίστοιχα], οι οποίες είναι ίσες [μεταξύ τους], που είναι αδύνατο. Επομένως οι ΑΒ [μαζί με την] ΑΓ δεν είναι ούτε ίσες ούτε μικρότερες από την ΒΓ. Ομοίως [αποδεικνύεται αυτό] και για τις άλλες [πλευρές του τριγώνου].

Η παραπάνω απόδειξη ερμηνεύεται ως εξής:

Υπόθεση: ΑΒΓ τυχαίο τρίγωνο

Συμπέρασμα: ΑΒ + ΑΓ > ΒΓ



Έστω ότι ΑΒ + ΑΓ ≤ ΒΓ => ΑΒ + ΑΓ = ΒΓ ή ΑΒ + ΑΓ < ΒΓ

<u>Αν ΑΒ + ΑΓ =ΒΓ:</u>

Κατασκευή: φέρεται ΑΕ ώστε ΒΕ = ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ

ΑΒ = ΒΕ => ΒΕΑ γωνία = ΒΑΕ γωνία, ΑΓ = ΕΓ => ΑΕΓ γωνία = ΕΑΓ γωνία

ΒΕΑ γωνία = ΒΑΕ γωνία = ΑΕΓ γωνία = ΕΑΓ γωνία [=> ΑΕ διχοτόμος και διάμεσος και ύψος => ΑΒΓ ισοσκελές ΑΛΛΑ: ΑΒΓ τυχαίο τρίγωνο] ΑΤΟΠΟ

<u>Αν ΑΒ + ΑΓ < ΒΓ</u>

Κατασκευή: Δ εσωτερικό σημείο του ΒΓ ώστε ΒΔ = ΑΒ, φέρεται το ΑΔ, Ε εσωτερικό σημείο του ΒΓ, ώστε ΕΓ = ΓΑ, φέρεται το ΕΑ

ΒΔ = ΑΒ => ΒΑΔ γωνία = ΒΔΑ γωνία

ΕΓ = ΓΑ => ΕΑΓ γωνία = ΓΕΑ γωνία

Στο τρίγωνο ΑΔΓ: ΒΔΑ γωνία > ΔΑΓ γωνία > ΕΑΓ γωνία => ΒΔΑ γωνία > ΕΑΓ γωνία [=>

ΒΔΑ γωνία > ΓΕΑ γωνία (1)]

Στο τρίγωνο ΑΒΕ: ΓΕΑ γωνία > ΒΑΕ γωνία > ΒΑΔ γωνία => ΓΕΑ γωνία > ΒΑΔ γωνία [=>

ΓΕΑ γωνία > ΒΔΑ γωνία (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΔΑ γωνία > ΓΕΑ γωνία και ΓΕΑ γωνία > ΒΔΑ γωνία] ΑΤΟΠΟ

Άρα ΑΒ + ΑΓ > ΒΓ

Κατά την παραπάνω απόδειξη έγινε χρήση των παρακάτω μαθηματικών προτάσεων από τα στοιχεία του Ευκλείδη:

Αίτημα α΄: από κάθε σημείο προς κάθε [άλλο] μπορεί να αχθεί ευθεία (κατασκευή)

Αίτημα β΄: το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί συνεχώς και ευθυγράμμως (κατασκευή)

Πρόταση ε΄: οι [προσκείμενες] γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες (ΒΑΔ γωνία = ΒΔΑ γωνία)

Πρόταση ιη΄: σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά (ΒΑΔ γωνία > ΒΔΑ γωνία)

Πρόταση ιθ΄: σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία (ΔΒ > ΒΓ)

Κοινή έννοια η΄: το ολόκληρο [μέγεθος] είναι μεγαλύτερο από το μέρος [του] (ΔΑΓ γωνία > ΕΑΓ γωνία)

Κοινή έννοια α΄: αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο [μέγεθος] είναι και μεταξύ τους ίσα (συνδυασμός των (α) και (β))

Σύγκριση των αποδείξεων του Ευκλείδη και των επικριτών του

Οι παραπάνω αποδείξεις παρουσιάζουν **ομοιότητες** και **διαφορές**.

Βασική τους ομοιότητα είναι ότι απαιτούν απλές γεωμετρικές κατασκευές εφικτές με κανόνα και διαβήτη. Επίσης, σε όλες τις αποδείξεις γίνεται αναφορά και χρήση άλλων ανισοτικών σχέσεων πλευρών και γωνιών τριγώνου καθώς και των ιδιοτήτων της διάταξης. Στις δυο πρώτες αποδείξεις ακολουθείται παρόμοια συλλογιστική πορεία η οποία είναι: εύρεση και έκθεση υπόθεσης και συμπεράσματος – γεωμετρική κατασκευή- απόδειξη για μία πλευρά- γενίκευση για κάθε πλευρά. Αντιθέτως στην τρίτη απόδειξη το πρόβλημα αναλύεται σε υποπεριπτώσεις. Τέλος η τέταρτη απόδειξη δεν προέκυψε με ευθεία συνεπαγωγή από την υπόθεση στο συμπέρασμα αλλά με την απαγωγή σε άτοπο, δηλαδή την άρνηση του συμπεράσματος και την κατάρριψη της μη πραγματοποίησής του.

Κύρια διαφορά μεταξύ της Ευκλείδειας και των άλλων αποδείξεων είναι ότι δεν απαιτείται προέκταση πλευράς του τριγώνου. Αυτό είναι και το πλεονέκτημά τους ότι δεν χρησιμοποιούν σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα εξωτερικά του αρχικού τριγώνου.

Ωστόσο, η απόδειξη του Ευκλείδη είναι συντομότερη επειδή σε όλες τις άλλες υπάρχουν παράλληλες διαδικασίες ή υποπεριπτώσεις. Η απόδειξη του Ήρωνα απαιτεί δύο όμοιες μικρότερες αποδείξεις- μία για κάθε ένα από τα δύο μικρότερα τρίγωνα, του Πορφύριου 4- μία για κάθε περίπτωση τριγώνου και η τελευταία αποτελείται από δύο σκέλη. Επομένως είναι συντομότερη και απλούστερη. Επίσης στο σχήμα που σχηματίζεται κατά την απόδειξη του Ευκλείδη είναι εύκολη και η διαπίστωση της αλήθειας του θεωρήματος με σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων (με ή χωρίς μέτρηση). Συνοψίζοντας θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η απόδειξη που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης είναι προτιμότερή λόγω της απλής κατασκευής της και συλλογιστικής πορείας της, της συντομίας της και της ευκολίας της στην επαλήθευση.

Πηγές πληροφόρησης

Ευκλείδη «Στοιχεία», τ. 1 «Η γεωμετρία του επιπέδου», εκδ. Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001

Ευκλείδεια Γεωμετρία Α και Β λυκείου, εκδ. Ο.Ε.Δ.Β., 2011

Τα αρχαία κείμενα προέρχονται από τις ιστοσελίδες:

http://el.wikisource.org/wiki/Στοιχεῖα/Στοιχεῖα_α΄

http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0085%3Abook%3D1%3Atype%3DProp%3Anumber%3D20

http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/proclidiadochiin00procuoft.pdf

Για τα σχήματα έγινε χρήση του λογισμικού Η/Υ Geogebra 4