

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Συνθετική εργασία στη γεωμετρία Β΄ Λυκείου

Μάθημα: Γεωμετρία

Θεματική ενότητα: Θεωρήματα του Πυθαγόρα/ Κανονικά πολύεδρα

Ομάδα εργασίας: Αρσένη Αγγελική

Πυλαρινού Γεωργία

Σπανουδάκης Χαράλαμπος

Φωστηροπούλου Δανάη-Μαρία

Υπεύθυνη καθηγήτρια: Αργύρη Παναγιώτα

Εισαγωγή

Στη Γεωμετρία, πολυέδρο ορίζεται ένα τρισδιάστατο σχήμα, το οποίο φράσσεται από περασμένα πολύγωνα. Η λέξη της αρχαίας ελληνικής γλώσσας <<έδρα>>, σημαίνει βάση. Το πολυέδρο – πάντα με τη γεωμετρική έννοια – είναι η τρισδιάστατη εκδοχή του πολυτόπου, που ορίζεται σε κάθε διάσταση.

Στην αρχαία Ελλάδα αναπτύχθηκε η ιδέα να διακρίνουμε τα πολυέδρα σε ομάδες, σύμφωνα με κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες που παρουσιάζουν. Την ομάδα των πολυέδρων που έχουν την ιδιότητα όλες οι έδρες τους να είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και οι πολυεδρικές τους γωνίες να είναι ίσες τα ονομάζουμε κανονικά πολυέδρα. Ονομάζονται και πλατωνικά, γιατί ο Αθηναίος φιλόσοφος Πλάτων (4^{ος} αι. π.Χ.), τα χρησιμοποιεί στο διάλογό του <<Τίμαιος>> ως μοντελα των δομικών στοιχείων για τη δημιουργία του κόσμου.

Τα πλατωνικά πολύεδρα είναι :

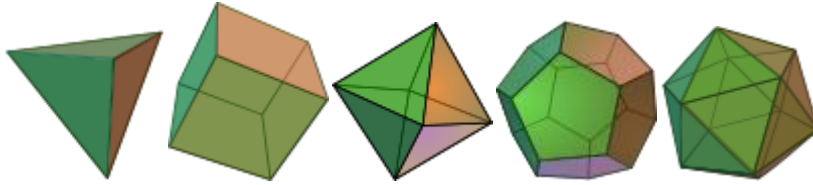
A) το τετράεδρο που έχει ως έδρες του ισόπλευρο τρίγωνο

B) το εξάεδρο (κύβος) που έχει ως έδρες του τετράγωνο

Γ) το οκτάεδρο που έχει ως έδρες του ισόπλευρο τρίγωνο

Δ) το δωδεκάεδρο που έχει ως έδρες του κανονικό πεντάγωνο

Ε) το εικοσάεδρο που έχει ως έδρες του ισόπλευρο τρίγωνο



τετράεδρο εξάεδρο οκτάεδρο δωδεκάεδρο εικοσάεδρο

Σύνδεση των τεσσάρων στοιχείων (φωτιά, γη, αέρας, νερό) με τα κανονικά στερεά(τετράεδρο, εξαέδρο(κύβος), οκτάεδρο, εικοσάεδρο).

A. Φωτιά – Τετράεδρο: Το τετράεδρο με τον ελάχιστο αριθμό εδρών είναι το ελαφρύτερο με τις πιο κοφτερές γωνίες της φωτιάς. Στο άγαλμα του John Robinson, έχουμε μια αναπαράσταση της αντιστοιχίας φωτιά-τετράεδρο.



Η φωτιά του Προμηθέα

B. Γη – Κύβος: Ο κύβος στηριζόμενος σε οποιαδήποτε τετραγωνική του έδρα εκφράζει τη σταθερότητα, χαρακτηριστικό της γήινης ύλης, της οποίας το βάρος έχει κατακόρυφη διεύθυνση με την πεποίθηση που επικρατούσε τότε ότι η γη βρίσκεται σε ηρεμία στο κέντρο το κόσμου.

Γ. Αέρας – Οκτάεδρο: Στο στοιχείο του αέρα αντιστοιχεί το οκτάεδρο. Στις μεταγενέστερες του Πλάτωνα συνδέσεις των στοιχείων με τα κοσμικά στερεά ανήκει η σύνδεση του οξυγόνου-βασικού συστατικού του αέρα- με το σύμβολο Ο (οκτάεδρο). Την εποχή του Πλάτωνα, καθώς το οκτάεδρο φαίνεται σαν το σχήμα που <<κρέμεται>> από τις αντίθετες γωνίες, με το τετράγωνό του να βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των γωνιών αυτών, διαιρώντας το σχήμα σε δύο ίσα μέρη, ακριβώς όπως κρέμεται μια σφαίρα από τους πόλους της, δείχνει την <<κίνηση>>, βασικό χαρακτηριστικό του αέρα, του πιο κινητικού στοιχείου της φύσης.

Δ. Νερό – Εικοσάεδρο: Ο μεγάλος αριθμός των εδρών του εικοσάεδρου συμβολίζει την υγρασία, χαρακτηριστικό του νερού, η οποία συγκρατεί τα σύνορα άλλων αντικειμένων. Ο Αριστομένης επινόησε την πυτταρξη ενός

πέμπτου στοιχείου, του αιθέρα, που επικρατεί έξω από τη γη και από το οποίο είναι δημιουργημένα τα ουράνια σώματα. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ο ουρανός διέφερε θεμελιακά από τον γήινο κόσμο. Είχε παρατηρήσει ότι τα ουράνια σώματα είναι φωτεινά και διαγράφουν ατέρμονες κινήσεις, παραμένοντας άφθαρτα και αμετάβλητα. Άρα υπέθεσε την ύπαρξη μιας άγνωστης ενεργειακής μορφής. Ο Αριστοτέλης δεν σύνδεσε τον αιθέρα με το δωδεκάεδρο παρά την <<θεικότητα>> του στερεού αυτού. Την χαρακτηριστική βολή στον αιθέρα έδωσε το 1905 ο Einstein με τη θεωρία της Σχετικότητας.



Μελέτη πολυέδρων

Στον πίνακα αναφέρονται οι αριθμοί των εδρών, ακμών και κορυφών κάθε πλατωνικού πολυέδρου:

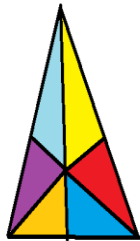
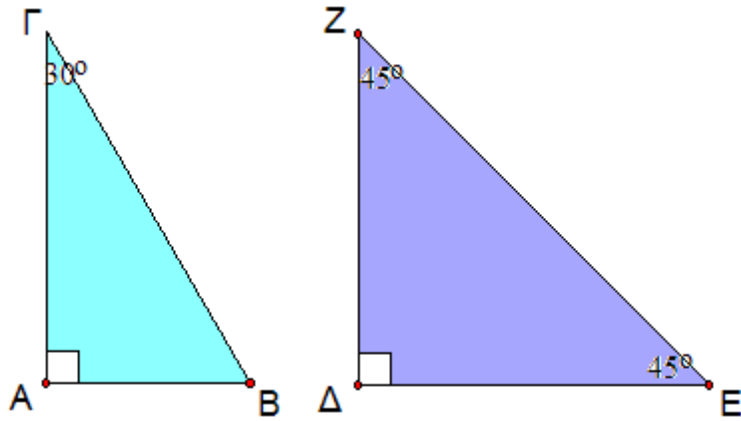
| Πλατωνικό πολυέδρο | Αριθμός εδρών | Αριθμός κορυφών | Αριθμός ακμών |
|--------------------|---------------|-----------------|---------------|
| τετράεδρο | 4 | 4 | 6 |
| εξάεδρο | 6 | 8 | 12 |
| οκτάεδρο | 8 | 6 | 12 |
| δωδεκάεδρο | 12 | 20 | 30 |
| εικοσάεδρο | 20 | 12 | 30 |

Παρατηρούμε ότι στο εξάεδρο και το οκτάεδρο το άθροισμα του αριθμού των εδρών και του αριθμού των κορυφών του είναι ο αριθμός 14 και ότι έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών. Στο δωδεκάεδρο και στο εικοσάεδρο το άθροισμα του αριθμού των εδρών και του αριθμού των κορυφών του είναι ο αριθμός 32 και ότι έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών.

Στο διάλογο «Τίμαιος» του Πλάτωνα, ο Τίμαιος αναφερόμενος στα κοσμικά σχήματα επιχειρεί να μαθηματικοποιήσει τη φύση. Διηγείται πώς το <<σχήμα του κόσμου>> δημιουργήθηκε από την αναλογία: φωτιά = αέρας αέρας = νερό νερό = γη. Η γη και η γωτιά συνδέονται μέσω του νερού και του αέρα που είναι οι γεωμετρικοί μέσοι της αναλογίας (η προέλευσή της πιθανότατα από τους Πυθαγορείους). Ο Τίμαιος δίνει στο σώμα του κόσμου το σχήμα της σφαίρας η οποία είναι το τέλει στερεό, εκθειάζοντας την ομορφιά, την συμμετρία και την πληρότητά της. Η σφαίρα περικλείει τα κοσμικά σχήματα και μόνο αυτά τα πέντε κανονικά πολύεδρα μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα. Ο Πρόκλος (412-485 μ.Χ.), Έλληνας νεοπλατωνικός φιλόσοφος-μαθηματικός, μαθητής του Πλάτωνα και σχολιαστής των <<Στοιχείων>> του Ευκλείδη, θεωρούσε τη σφαίρα σαν το τέλει εμβαδόν επιφανείας. Ο Πλάτων υποστήριξε ότι τρία μόνο από τα κανονικά πολύεδρα, το τετράεδρο, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο έχουν τη δυνατότητα να μετασχηματίζονται αμοιβαία. Τον ισχυρισμό του απέδωσε στη ιδέα ότι τα τέσσερα στερεά σχηματίζονται από τα δύο θεμελιώδη του τρίγωνα. Το τετράεδρο, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο σχηματίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει τη μλία κάθετη πλευρά του ίση με το μισό της υποτείνουσας. Ο κύβος που συνδέθηκε με τη γη, προέρχεται από το τρίγωνο του άλλου είδους (το ορθογώνιο ισοσκελές) αφού οι έδρες του είναι τετράγωνα. Για το λόγο αυτό ο Πλάτων πίστευε ότι τα μέρη της γης δε μετασχηματίζονται σε μέρη άλλου είδους. Τα τρίγωνα αυτά θεωρήθηκαν ως οι δομικοί λίθοι όλου του κόσμου, γιατί η ομορφιά τους ανάγεται στην απλότητα με την οποία συνδέονται οι γωνίες τους.

Κατά την αφήγηση του ο Τίμαιος αναφέρει ότι ως βασική μονάδα δημιουργίας θεωρεί δύο τρίγωνα: το ορθογώνιο με οξεία γωνία ίση με 300 και το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα, αποτελούν τα πρωταρχικά και θεμελιώδη στοιχεία από τα οποία συντίθεται τα τέσσερα θεμελιώδη στοιχεία της φύσης, δηλαδή το τετράεδρο-φωτιά, το εξάεδρο(κύβος)-γη, το οκτάεδρο-αέρας και το εικοσάεδρο-νερό. Η επιλογή των δύο αυτών τριγώνων δεν έγινε τυχαία από τον Πλάτωνα. Για την κοσμογονία του στηρίχτηκε, ύστερα από μία έντονη αφομοίωση στην πυθαγόρεια αντίληψη ότι οι αριθμοί είναι το ουσιαστικότερο στοιχείο του κόσμου και ο Τίμαιος συνδυάζει τη γεωμετρία των Πυθαγορείων με τη βιολογία του Εμπεδοκλή(493-433 π.Χ.)

$$E^{\wedge} = Z^{\wedge} \text{ και } B^{\wedge} = 2G$$



Αν σε τετράγωνο σχεδιάσουμε τους άξονες συμμετρίας του, χωρίζεται σε 8 ίσα ορθογώνια τρίγωνα με οξεία γωνία ίση με 45° .

Αν σε ισόπλευρο τρίγωνο σχεδιάσουμε τα 3 του ύψη, χωρίζεται σε 6 ίσα ορθογώνια τρίγωνα με οξεία γωνία ίση με 30° .

Μετασχηματισμοί κατά τον Τίμαιο

Ο Τίμαιος περιγράφει μετασχηματισμούς του νερού σε αέρα, του νερού σε αέρα και φωτιά, της φωτιάς σε αέρα, της φωτιάς σε νερό με τις παρακάτω εξισώσεις:

A) Το νερό εξατμίζεται (υπό ορισμένες συνθήκες) σε υδρατμούς.

1 νερό 2,5 αέρας

1 εικοσάεδρο 2,5 οκτάεδρα

$$1 * 20 * 6 = 2,5 * 8 * 6$$

$$120 = 120$$

B) Το νερό μπορεί να διαλυθεί και να δώσει αέρα και φωτιά.

1 νερό 2 αέρας + 1 φωτιά

1 εικοσάεδρο 2 οκτάεδρα + 1 τετράεδρο

$$1 * 20 * 6 = 2 * 8 * 6 + 1 * 4 * 6$$

$$120 = 96 + 24$$

$$120 = 120$$

Γ) Η φωτιά μετασχηματίζεται σε αέρα.

2 φωτιές 1 αέρας

2 τετράεδρα 1 οκτάεδρο

$$2 * 4 * 6 = 1 * 8 * 6$$

$$48 = 48$$

Δ) Η φωτιά μετασχηματίζεται σε νερό.

5 φωτιές 1 νερό

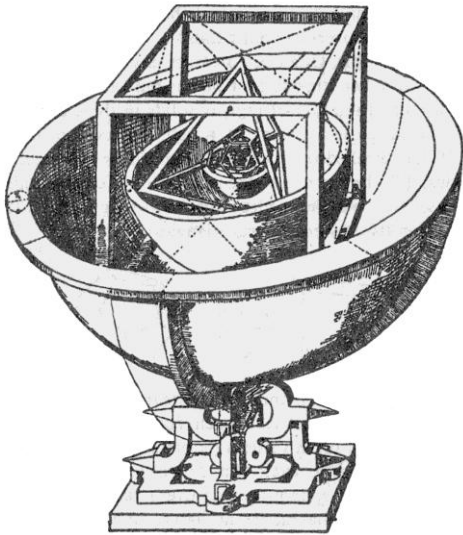
5 τετράεδρα 1 εικοσάεδρο

$$5 * 4 * 6 = 1 * 20 * 6$$

$$120 = 120$$

Η ανακάλυψη των πλατωνικών στερεών

Ο διάλογος «Τίμαιος» του Πλάτωνα, είναι το παλαιότερο κείμενο που έχει διασωθεί και αναφέρεται στα κοσμικά σχήματα. Ο κύβος και το τετράεδρο (πυραμίδα) ήταν γνωστά στους Πυθαγορείους, αλλά και σε προγενέστερους του Ελληνικού πολιτισμού. Οι Ετρούσκοι που κατοίκησαν στην Ιταλία το 500 π.Χ. είχαν κοσμήματα σχήματος δωδεκαεδρικού.



Model of the universe; the outermost sphere is Saturn's.
Illustration in Kepler's *Mysterium Cosmographicum*.

Το μοντέλο με βάση τα πλατωνικά στερεά για το ηλιακό σύστημα του Kepler

Μια πειστική εξήγηση για την πρόωπη ανακάλυψη του δωδεκαέδρου από Ετρούσκους και Πυθαγορείους είναι το γεγονός ότι στη Ιταλία υπήρχαν άφθονα κοιτάσματα πυριτίου (ορυκτό με κρυστάλλους σχεδόν δωδεκαεδρικούς και κυβικούς). Οι κυριότερες πηγές που έχουμε για την ανακάλυψη του τετραέδρου, του κύβου, του δωδεκαέδρου (από τους Πυθαγορείους) και του οκταέδρου και του εικοσαέδρου (από τον Θεαίτητο) είναι αυτές του Ευδήμου (370-300 π.Χ.) και του νεοπλατωνικού Σύριου φιλόσοφου Ιάμβλιχου (245-325 μ.Χ.). Ο Θεαίτητος (415-369 π.Χ.) σπουδαίος Αθηναίος μαθηματικός, δίδαξε στην Ακαδημία του Πλάτωνα και μαζί με τον Εύδοξο συνέβαλε ιδιαίτερα στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Από τα μαθηματικά του επιτεύγματα ήταν και η γενίκευση για την ασυμμετρία (ο δάσκαλός του Θεόδωρος ο Κυρηναίος είχε αποδείξει την <<ασυμμετρία των τετραγωνικών ριζών των 3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15 και 17. Ο Πλάτωνας για να τιμήσει τη μνήμη του Θεαίτητου έγραψε τον ομώνυμο διάλογο.