ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρία, Μεθοδολογία και Ασκήσεις

Επιμέλεια: Άλκης Τζελέπης

Αθήνα 2011

Περιεχόμενα

ΕΝΟΤΗΤΑ 1η:
ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για κάθε $x \in R$ ισχύει $[(f+g)(x)-2]\cdot(f+g)(x) \leq 2[(f\cdot g)(x)-1]$.
   Να δείξετε ότι $f=g$.

2. Δίδεται συνάρτηση f, γνήσια αύξουσα, ώστε $f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right)=x$.
   Να δείξετε ότι $f(x)=x$.

3. ι) Αν $(gof)(x)=\frac{1+x}{1-x}$ και $f(x)=lnx$, τότε να βρείτε τη συνάρτηση g.
   ιι) Αν $(gof)(x)=3x+2$ και $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$, τότε να βρείτε τη συνάρτηση f.

4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $(f(x))^3+f(x)=x$, τότε να βρείτε, αν υπάρχει, τη συνάρτηση f^{-1}.

5. Δίδεται συνάρτηση f με $f(f(x))+f^3(x)=2x-1$.
   ι) να δείξετε ότι η f είναι ΄΄1-1΄΄
   ιι) να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3+x)=f(4-x)$.

6. Δίδεται συνάρτηση f με $f(f(x))=x+f(x)$.
   ι) να βρείτε την $f\big(f(f(x))\big)$
   ιι) να δείξετε ότι η f είναι ΄΄1-1΄΄
   ιιι) να δείξετε ότι $f(0)=0$
   ιν) να δείξετε ότι $f(100)=100+f^{-1}(100)$

7. Έστω $f: R\to R$ με $f(f(x))=x+2$.
   ι) να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=f(x)-2$
   ιι) να βρείτε την $f\big(f(f(x))\big)$
   ιιι) να δείξετε ότι $f(x+2)=f(x)+2$
   ιν) να δείξετε ότι δεν υπάρχει $\alpha \in R: f(a)=a$

8. Δίδεται συνάρτηση f με $f(f(x))=x^2-x+1$.
   ι) να δείξετε ότι $f(1)=1$
   ιι) αν $g(x)=x^2-xf(x)+1$ να βρεθεί το g(0) και να δείξετε ότι η g δεν είναι ΄΄1-1΄΄

9. Δίδεται συνάρτηση f η οποία αντιστρέφεται και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,4). Να βρεθεί το x, αν γνωρίζετε ότι $f^{-1}(2+f(x^2-3))=2$.

10. Έστω $f: R\to R$ με $f(f(x))+x=0$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:
    ι) η f είναι ΄΄1-1΄΄
    ιι) $f^{-1}(x)=-f(x)$
    ιιι) η συνάρτηση f δεν είναι γνήσια αύξουσα

11. Έστω $f: R \to R$ με $f(x+\psi) = f(x) + f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in R$. Να δείξετε ότι:
   ι) $f(0) = 0$
   ιι) $f(-x) = -f(x)$
   ιιι) αν η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα το 0 (μηδέν), τότε η f είναι ΄΄1-1΄΄ και ισχύει: $f^{-1}(x+\psi) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi)$

12. Έστω $f: R \to R$ με $f(x+\psi) = f(x) \cdot f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in R$ και $f(0) \neq 0$.
   Να δείξετε ότι:
   ι) $f(x) \neq 0,\ x \in R$
   ιι) $f(x) > 0,\ x \in R$
   ιιι) $f(0) = 1$
   ιv) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in R$
   v) αν η εξίσωση f(x) = 1 έχει μοναδική ρίζα το 0 (μηδέν), τότε η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει: $f^{-1}(x\psi) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi),\ x > 0,\ \psi > 0$

13. Αν για τη συνάρτηση $f: [0,1] \to R$ ισχύουν:
   α) η f είναι αύξουσα β) $f(x) + f(1-x) = f(x^2) + 1,\ x \in R$
   να δείξετε ότι:
   ι) f(0) = 1
   ιι) f(x) = 1, για κάθε $x \in [0,1]$

14. Δίδεται συνάρτηση f γνήσια μονότονη, η οποία διέρχεται από τα σημεία A(-1, 2002) και B(1, 2004). Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, έτσι ώστε: $f(f(x) - 2001) < 2004$

15. Δίδεται συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu\frac{\pi x}{2} + \sqrt{-\eta\mu^2(\pi x)}$
   Να βρεθεί το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης και να σχεδιασθεί η γραφική της παράσταση.

16. ι) Δίδονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με gof "$1-1$".
   Να δείξετε ότι και η f είναι "$1-1$"
   ιι) Έστω $f: R \to R$. Αν για κάθε άλλη συνάρτηση $g: R \to R$ ισχύει ότι gof = fog, τότε να δείξετε ότι f(x) = x για κάθε x.
   ιιι) Έστω $f, g, h : R \to R$. Να δείξετε ότι αν (gof)(x) = x και (hog)(x) = x, τότε h = f

17. Έστω η μη μηδενική συνάρτηση $f: R \to R$ έτσι ώστε:
$$f(x+\psi) + f(x-\psi) = 2f(x)f(\psi),\ x, \psi \in R$$
   ι) Να δείξετε ότι f(0) = 1 και ότι η f είναι άρτια
   ιι) Έστω $\alpha \in R$ με $f(\alpha) = 0$. Να δείξετε ότι $f(a+x) = -f(a-x),\ x \in R$ και ότι $f(2a) = -1$
   ιιι) Να δείξετε ότι μία περίοδος της f είναι το 4α, $\alpha \neq 0$

18. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με $f^5(x) + f(x) + x = 0$. Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1}

19. Δίδονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $f(R) = g(R) = R$. Αν οι f, g είναι "$1-1$", τότε να δείξετε ότι και η gof είναι "$1-1$" και ισχύει $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

20. Δίδονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $f(R) = g(R) = R$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $(fog)(x) = x$ και $(gof)(x) = x$, για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι:
ι) οι f, g είναι "1 – 1"
ιι) $f = g^{-1}$ και $g = f^{-1}$

21. Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^{2009} + x^{2011}$
ι) να βρείτε το f (1)
ιι) να εξετάσετε αν η f είναι "1 – 1" στο R
ιιι) να λύσετε την εξίσωση $x^{2009} + x^{2011} = 2$

22. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ ώστε $2f(x) + f(-x) = x^5 + x^3 + x,\ x \in R$
Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$

23. ι) Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ με την ιδιότητα $f\left(\frac{x}{e}\right) \le lnx \le f(x) - 1,\ x > 0$
Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.
ιι) Έστω $f(x) + x \le x^2 \le f(x+1) - x,\ x \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

24. Έστω συνάρτηση f με $(fof)(x) = x^5$. Να δείξετε ότι $f(x^5) = f^5(x)$

25. Έστω συνάρτηση f με $(fofof)(x) = x^2 - 3x + 4$. Να δείξετε ότι f (2) = 2

26. Έστω συνάρτηση $f: R^* \to R$ με $f(x) - f(\psi) = f\left(\frac{x}{\psi}\right),\ x, \psi \ne 0$
Αν η εξίσωση f (x) = 0 έχει μοναδική ρίζα, τότε
ι) να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1}
ιι) να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$
ιιι) αν επιπλέον ισχύει f (x) > 0 για x > 1, να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

27. Έστω συνάρτηση $f: R^* \to R^*$ με $f(x\,\psi) = f(x)f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in R^*$
Επιπλέον η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία ψ = x σε ένα το πολύ σημείο.
Να δείξετε ότι:
ι) αν η εξίσωση f (x) = 1 έχει μοναδική ρίζα, τότε η f είναι "1 – 1"
ιι) η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x},\ x \ne 0$ είναι αντιστρέψιμη

28. Έστω συνάρτηση με $(fof + gof)(x) = x$, για κάθε $x \in R$.
Να δείξετε ότι:
ι) υπάρχει η f^{-1}
ιι) $f^{-1}(x) = f(x) + g(x)$

29. Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu x + x + \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
ι) να δείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται
ιι) να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

30. Έστω συνάρτηση f γνήσια μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(3, 2) και B(5, 9)
    ι) να λυθεί η εξίσωση $f\left(2+f^{-1}(x^2+x)\right)=9$
    ιι) να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(x^2-8x)-2)<2$

31. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(fof)(x)=3x+2$ για κάθε $x \in R$
    ι) να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι "1 – 1" και ότι το σύνολο των τιμών της είναι ολόκληρο το R
    ιι) να λυθεί η εξίσωση $9f(x)+8=f^{-1}(53)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΟΡΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

1. Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$, $\nu.\delta.o.$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, $\acute{o}\tau\alpha\nu$: $\iota)$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)+1}{x-3} = 2$ $\quad \iota\iota)$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-2x}{2x^2-18} = 5$

3. Αν $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 5$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x \to 2} \left[g(x)\left(2x^2+x-10\right) \right] = 3$, $\nu\alpha \;\; \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \;\; \tau o$ $\lim\limits_{x \to 2} \left[f(\chi) g(x) \right]$.

4. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $\nu.\delta.o.$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

5. Βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, όταν:

   $\iota)$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x-8}{f(x)} = \pm\infty$ $\quad \iota\iota)$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x^2} = -\infty$ $\quad \iota\iota\iota)$ $\lim\limits_{x \to 2} \left[f(x)\left(2x^2-10\right) \right] = +\infty$

6. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-l}{f(x)+l} = 0$, $\nu.\delta.o.$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

7. Αν $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-1}{x-2} = 3$, $\nu\alpha \;\; \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \;\; \tau o$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^\nu f(x) - 2^\nu}{x-2}$

8. Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\nu\alpha \;\; \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \;\; \tau o$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot f(2x) + f(-x) \cdot \eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x - 2x^2}$

9. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι f (x) = f (x + 3) για κάθε πραγματικό αριθμό x και $\lim\limits_{x \to -2} \left[f(x) - 2x + 5 \right] = 4$, $\nu\alpha \;\; \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \;\; \tau o$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

10. ι) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x} \right)$

    ιι) Αν ισχύει ότι $\left| f(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x} \right| \le x^4$, $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \dfrac{1}{2} \right)$ $\nu\alpha \;\; \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \;\; \tau o$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

11. Αν $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ και $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{2-\sqrt{x^2+3}}$, βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

12. Αν ισχύει ότι $x^2 f(x) - \eta\mu^2 x = 1 - \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ $\nu\alpha \;\; \delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon \;\; \acute{o}\tau\iota$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$

13. Για τη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$ $\kappa \cdot x^2 \le f(x) \le x^2$, $\acute{o}\pi o\upsilon$ $\kappa, x \in (0,1)$. Τότε βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x^3}$

ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

1. Να υπολογισθούν τα όρια:

$$i)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{3x^2+4}\ ,\quad ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\ ,\quad iii)\ \lim_{x\to+\infty}x\cdot\eta\mu^{\rho}\frac{1}{x}\ ,\ \rho\in\mathbb{N}^*$$

2. Ομοίως:

$$i)\ \lim_{x\to+\infty}\left(5^x-7^x\right),\ ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3\cdot5^x}{5\cdot3^x+2\cdot7^x}\ ,\ iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+\lambda^{x-1}}{2^x+\lambda^{x+1}}\ ,\ \lambda>0$$

$$\iota v)\ \lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1-x^3}{|x|+2}}\ ,\quad v)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-2\ln(x+1)\right]$$

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90^o). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει σταθερό μήκος c, ενώ το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το Α στην προέκταση της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα μήκη των ΒΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν ίσα.

4. Κατά τη διάρκεια ενός ποιοτικού ελέγχου σε μία μονάδα παραγωγής, βρέθηκε ότι η ποσότητα των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από έναν εργάτη δίνεται από τον τύπο $E(t)=\dfrac{3\cdot t+7}{t}$, όπου t είναι ο χρόνος που χρειάζεται ένας εργαζόμενος για να κάνει τη συγκεκριμένη εργασία. Να εκτιμήσετε τι θα συμβεί όταν οι εργαζόμενοι πιέζονται για την ελαχιστοποίηση του τυπικού μέσου χρόνου παραγωγής του προϊόντος.

5. Αν για τις συναρτήσεις f , g ισχύουν $x^2f^2(x)+x^2g^2(x)-f^2(x)\cdot g^2(x)=0$, $x>0$ και οι συναρτήσεις παίρνουν θετικές τιμές για κάθε χ > 2004 , τότε να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων

$$\frac{1}{f(x)}\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{1}{g(x)}\quad \sigma\tau o\quad +\infty$$

6. Για μια συνάρτηση f ισχύει:

$$2\cdot f(x+1)-f\left(\frac{x+1}{x}\right)=-x\ ,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\neq0\ ,\ x\neq-1,\ \ \nu\alpha\ \ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon\ \ \tau o\ \ \lim_{x\to-\infty}f(x).$$

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και ότι ισχύει $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\sqrt{x^2-x+1}+x\right]=1$. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

8. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\lambda^2-1\right)\cdot x^3+P(\lambda)\cdot x^2+x+1}{(\lambda+1)\cdot x^2+5x-1}$$

, αν το P (λ) είναι πολυώνυμο για το οποίο ισχύει ότι

$$\left(P(1)\right)^2+\left(P(-1)\right)^2+1=2P(-1)$$

9. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύουν $f(x)\neq0$, $x\in\mathbb{R}$ $\ \kappa\alpha\iota\ $ $f(1)=2001$, τότε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f(2001)+1\right]x^{2001}+x^4+x^3+1}{-\left[f(-1)\right]^{2004}x^2-2}$$

είναι ίσο με: Α. $+\infty$ Β. $-\infty$ Γ. 0 Δ. $f(2001)+1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Να υπολογίσετε τα όρια: $i) \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{8x}-3x}{x-2}$, $ii) \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-\sqrt{x+8}}{x-1}$

2. Δίνεται μη σταθερή συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

   αν $g(x)=\frac{\sqrt{f(x)+2}+\sqrt{f(x)+7}-5}{f(x)-2}$

3. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}-2\right)g(x)=5$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))$

4. Αν $\lim\limits_{x\to 1}(2f(x)+x^2-x+2)=6$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2f(x)}-2}{f^2(x)-4}$

5. i) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=-2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-1}{x^2+x-2}$

   ii) Αν $f^3(x)+x^2f(x)=2x^3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=l\in R$, να βρείτε το l

6. i) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-a^2}{x-1}=a$, να βρείτε το α, ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-a^2}{x-1}\le 4$

   ii) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sqrt{x}}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-\sqrt{x}}{x}$

7. Αν $f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+\sqrt{f(x)}}{f(x)-1}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $f(x)>0, g(x)>0$, να δείξετε ότι:

   $i) \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{f(x)+g(x)}=0$ και $ii) \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^3(x)+g^3(x)}{f(x)+g(x)}=0$

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\,g(x))=0$, να δείξετε ότι:

   $i) \lim\limits_{x\to x_0}(f^2(x)+g^2(x))=1$ και $ii) \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^3(x)+g^3(x)-f(x)-g(x)+3f(x)g(x)}{f(x)+g(x)-1}=2$

10. Αν η συνάρτηση f (ε) εκφράζει το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)=\varepsilon\, x^2+x-1$, να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon)$ και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

11. Να δείξετε ότι: $i) \lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}=1$ και $ii) \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{2\,x^2}{x^4+1}\right)=2$

12. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-(1+a\,x)}{x^2}$, $A=[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε $\lim_{x\to 0} f(x)=\beta\in R$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση g, τέτοια ώστε $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2 g(x)$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

13. Θεωρούμε την εξίσωση $\omega\, x^2+\beta\, x+\gamma=0$ με ρίζες x_1, x_2 και $|x_1|<|x_2|$.

Να δείξετε ότι: $\lim_{\omega\to 0} x_1=-\frac{\gamma}{\beta}$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=e^{3x+2}$, $g(x)=lnx^2$.

Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2 x-4}{x}$

15. Αν $g(x)=\lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{(4x-5)\omega^2+3x\omega+1}{\omega+5x}\cdot \eta\mu\frac{1}{\omega}\right]$, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση παριστάνει ευθεία, η οποία είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α(1,-1), Β(1,1) και Γ(3,5).

16. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{ax+\beta}{x^2+\beta x+\alpha}$. Να ορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, ώστε:

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

17. Να δείξετε ότι: $\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

18. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού A = [1,3] και σύνολο τιμών g(A) = (3,6) δεν είναι συνεχής

ii) Να αποδείξετε ότι η μη σταθερή συνάρτηση $g: R\to Q$ δεν είναι συνεχής

19. Αν σε μια περιοχή του 0 (μηδενός) ισχύει $\alpha\;\eta\mu x+\beta\;\eta\mu 2x\le\gamma\;\eta\mu 3x$ να δείξετε ότι $\alpha+2\beta=3\gamma$

20. i) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to {x_0}^+} g(x)=1$, $\lim_{x\to {x_0}^-} g(x)=3$,

τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=0$

ii) Δίνονται οι συναρτήσεις h, f, g με h(x) = f(x) g(x). Αν η h είναι συνεχής στο x_0 με $h(x_0)\neq 0$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0, να αποδείξετε ότι και η g δεν είναι συνεχής στο x_0

21. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$. Αν για κάθε x_1, x_2 ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}$,

τότε να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής

β) η συνάρτηση με τύπο g(x) = f(x) – x είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα [α, β]

γ) η εξίσωση f(x) = x έχει μοναδική λύση στο [α, β]

22. Δίνεται συνάρτηση με $A_f = R$ και $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) - \alpha\,\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

Αν το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

23. Αν $|f(x)\eta\mu x - 2x| \leq x^2, x \in R$ τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(x)+\eta\mu\chi}{2x-\eta\mu x}$

24. i) Αν $\lim\limits_{x\to 0}[f^2(x) + \eta\mu^2 x] = 0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

ii) Έστω $g(x) + 3f(x) \leq 0 \leq 2g(x)$ κοντά στο 0 (μηδέν) και $\lim\limits_{x\to 0}(2g(x) - 3f(x)) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

iii) Έστω $f(x) \leq 0 \leq g(x)$ κοντά στο 0 (μηδέν) και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

25. Έστω $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 3x) = 4$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, ώστε: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)+\mu\, x-2}{xf(x)-3x^2+1} = 2$

26. Έστω $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)-x}{x+1} = 4$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)+3\mu\, g(x)}{f(x)-g(x)} = -2$. Να βρείτε το $\mu \in R$

27. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2+1}$, ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$, iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2+1}$, iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} (4x - 3\eta\mu x)$

v) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+\eta\mu x}{4x-3\eta\mu x}$, vi) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x^2+2x}-x}$, vii) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\eta\mu\frac{1}{x} + \eta\mu\frac{2}{x} + \cdots + \eta\mu\frac{100}{x}\right)$

28. Έστω $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - xg(x)) = 4$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}(2f(x) + xg(x)) = 2$.

Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ και ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{\eta\mu\frac{1}{x}}$

29. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2^{x+1}+3^{x+2}}{5\cdot 2^x-3\cdot 3^x}$, ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5\cdot 2^x-4\cdot 3^x+2}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x-5}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{x+1}-10^x}{a^{x+1}+10^x}$, $a>0$, iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^{x+1}-\beta^{x+1}}{a^x-\beta^x}$, $a>0,\ \beta>0,\ \alpha\neq\beta$

30. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{9x^2-x+1}\right)$

31. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν: $|f(x)-g(x)|\le (x-1)^2|g(x)|$ και $\lim\limits_{x\to1} g(x)=3$.

Να βρείτε τα όρια: $i)\ \lim\limits_{x\to1} f(x)$, $ii)\ \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}$

32. Για τις συναρτήσεις $f,g: R\to R$ ισχύουν: $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=0$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)g(x))=0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ με την ιδιότητα $f^3(x)-xf^2(x)-x^2f(-x)=x^2\eta\mu x,\ x\in R$.

Αν το $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in R$ να αποδείξετε ότι ισούται με 1(μονάδα)

34. Έστω συνάρτηση με $f(x+\psi)=f(x)\sigma\upsilon\nu2\psi+f(\psi)\sigma\upsilon\nu2x$, $x,\psi\in R$.

Αν $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\sigma\upsilon\nu2\alpha$, $\alpha\in R$

35. Αν $f^2(x)+2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2x\le0,\ x\in R$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$

36. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

37. Αν $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\,f(3x)-f(-x)\eta\mu2x}{3x^2-\eta\mu^2x}$

38. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\ln\frac{a^{2x}+e^{2x}}{e^x}-x$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

39. Δίνεται η συνάρτηση f με $xf(x)\le\eta\mu2x,\ x\in R$. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο x = 0, να αποδείξετε ότι $f(0)=2$

40. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $x_0=\alpha$, για την οποία ισχύει

$f(x)(x-a)\ge x^2+a\,x-2a^2,\ x\in R$. Να αποδείξετε ότι $f(a)=3a$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3η:
ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO:

- Συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα [α, β]
- $f(a)\cdot f(\beta)<0$

  Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Σχόλιο 1: Τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α, β)
Σχόλιο 2: Τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των χ΄χ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ. BOLZANO

1η ΜΟΡΦΗ

[εύρεση ρίζας εξίσωσης σε ανοικτό διάστημα]

Παράδειγμα 1ο

Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)\cdot e^{x+1}=1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (-1, 0).

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=(x+1)\cdot e^{x+1}-1$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [-1, 0], με $f(0)=e-1>0$, $f(-1)=-1<0$. Επομένως $f(0)\cdot f(-1)<0$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θ. Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, δηλαδή $(x_0+1)\cdot e^{x_0+1}-1=0 \Leftrightarrow (x_0+1)\cdot e^{x_0+1}=1$.

Παράδειγμα 2ο

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^2+1}{x-a}+\dfrac{x^4+2}{x-\beta}=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α, β).

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x\neq a$ και $x\neq\beta$, οπότε μετασχηματίζεται στην ισοδύναμή της $(x-\beta)(x^2+1)+(x-a)(x^4+2)=0$ (1).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-\beta)(x^2+1)+(x-a)(x^4+2)$, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α, β], με $f(a)=(a-\beta)(a^2+1)$ και $f(\beta)=(\beta-a)(\beta^4+2)$.
Επομένως $f(a)\cdot f(\beta)=-(a-\beta)^2(a^2+1)(\beta^4+2)<0$ και σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον λύση της εξίσωσης (1) στο ανοικτό διάστημα (α, β), η οποία είναι επιτρεπτή λύση της αρχικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 3ο

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-π, π)
Υπόδειξη:
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-x^2$ και εφαρμόζουμε δύο φορές το θεώρημα Bolzano στα κλειστά διαστήματα [-π, 0] και [0, π] αντίστοιχα (βλ. 1ο παράδειγμα).

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, μία στο (-π, 0) και μία στο (0, π).

Παράδειγμα 4ο

Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)\cdot 2^{x+1} - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

ΛΥΣΗ

« Όταν δεν έχουμε κλειστό διάστημα στο οποίο να ανήκει η ρίζα, μπορούμε να εργασθούμε ως εξής: »

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = (x+1)\cdot 2^{x+1} - 1, x \in \Re$. Δοκιμάζουμε διάφορα χ με σκοπό να προκύψουν δύο τιμές ετερόσημες. Έτσι παρατηρούμε ότι $f(-1) = -1 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$.
Επομένως αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο [-1, 0], σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

Σχόλιο: Το θέμα αυτό αντιμετωπίζεται επίσης με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (βλ. παρακάτω).

2η ΜΟΡΦΗ

[εύρεση ρίζας εξίσωσης σε κλειστό διάστημα]

Παράδειγμα

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f : [α, β]→[α, β] και g : [α, β]→[α, β] με g (α) = α , g (β) = β. Να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = g (x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [α, β].

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x) = f (x) – g (x) η οποία είναι συνεχής στο [α, β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, με:

h(α) = f (α) – g (α) = f (α) – α , h (β) = f (β) – g (β) = f (β) – β

Επειδή όμως ισχύουν: $\begin{matrix} a \le f(a) \le \beta \Leftrightarrow f(a) - a \ge 0 \Leftrightarrow h(a) \ge 0 \\ a \le f(\beta) \le \beta \Leftrightarrow f(\beta) - \beta \le 0 \Leftrightarrow h(\beta) \le 0 \end{matrix}$, έχουμε $h(a)h(\beta) \le 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

ι) αν h (α) h (β) < 0, σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση h (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

ιι) αν h (α) h (β) = 0, τότε h (α) = 0 ή h (β) = 0 .Δηλαδή η εξίσωση h (x) = 0 έχει λύση το α ή το β.

Επομένως η εξίσωση h (x) = 0, άρα και η ισοδύναμή της f (x) = g (x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο κλειστό διάστημα [α, β].

3η ΜΟΡΦΗ

[θεωρητικές ασκήσεις]

Παράδειγμα 1ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(x) \neq 0$ για κάθε χ στο [α, β], τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ΛΥΣΗ

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση δεν διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο [α, β]. Τότε θα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε $f(\xi_1) > 0, f(\xi_2) < 0$, δηλαδή $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$. Έστω ότι $\xi_1 < \xi_2$. Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [a, \beta]$, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε f (ξ) = 0. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί, διότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο [α, β]. Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Παράδειγμα 2ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] με $f(a) = f\left(\frac{a+2\beta}{3}\right)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{\beta - a}{3}\right)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{\beta - a}{3}\right)$. Η g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[a, \frac{2a+\beta}{3}\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων με:

$g(a) = f(a) - f\left(\frac{2a+\beta}{3}\right) \overset{\upsilon\pi o\theta.}{=} f\left(\frac{a+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2a+\beta}{3}\right)$ και

$g\left(\frac{2a+\beta}{3}\right) = f\left(\frac{2a+\beta}{3}\right) - f\left(\frac{a+2\beta}{3}\right)$.

Επομένως $g(a)g\left(\frac{2a+\beta}{3}\right) = -\left[f\left(\frac{a+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2a+\beta}{3}\right)\right]^2 \leq 0$

Έτσι αν το γινόμενο είναι αρνητικό, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(a, \frac{2a+\beta}{3}\right) \subseteq (a, \beta)$ ώστε g (ξ) = 0.

Αν g (α) = 0 ή $g\left(\frac{2a+\beta}{3}\right) = 0$ τότε οι αριθμοί που ικανοποιούν την ισότητα είναι αντίστοιχα το α και το $\frac{2a+\beta}{3}$.

<u>4η ΜΟΡΦΗ</u>

[προβλήματα]

Παράδειγμα

Ένας ορειβάτης βρίσκεται στους πρόποδες ενός βουνού στις 7 π.μ. και φθάνει στην κορυφή στις 3 μ.μ. Το επόμενο πρωί ξεκινά την κατάβαση στις 7 π.μ. και φθάνει στους πρόποδες μετά από 8 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο, στο οποίο ο ορειβάτης βρισκόταν την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

ΛΥΣΗ

Έστω f (t) και g (t) οι συναρτήσεις που δίνουν την απόσταση (θέση) του ορειβάτη από το σημείο εκκίνησης, κατά την ανάβαση και κατάβαση αντίστοιχα. Επίσης $t \in [7, 15]$ και s το συνολικό μήκος της διαδρομής.

Έτσι έχουμε: f (7) = 0, f (15) = s και g (7) = s, g (15) = 0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση h (t) = f (t) – g (t), $t \in [7, 15]$. Η h είναι συνεχής με h (7) = – s και h (15) = s.

Επομένως h (7) h (15) = $-s^2 < 0$ και σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $t_0 \in (7,15)$ τέτοιο ώστε $h(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0) = g(t_0)$, δηλαδή το ζητούμενο.

5η ΜΟΡΦΗ

[εύρεση του πρόσημου συναρτήσεων]

Εφαρμογές

Να βρεθεί το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=1-2\eta\mu x, \quad x\in[0,2\pi]$

2. $g(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, \quad x\in\Re$

3. $h(x)=\eta\mu 2x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x, \quad x\in(0,2\pi)$

Σχόλιο: Η γνώση του πρόσημου μιας συνάρτησης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη μονοτονίας και κυρτότητάς της.

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ:

- Συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα [α, β]
- $f(a)\neq f(\beta)$

Τότε για κάθε η που ανήκει μεταξύ των τιμών $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\eta$

Δηλαδή, η συνάρτηση παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(a), f(\beta)$.

Σχόλιο 1: Το Θ.Ε.Τ. σε συνδυασμό με τη μονοτονία της συνάρτησης, μας επιτρέπει να βρούμε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης. Έτσι:
ι) αν f γνήσια αύξουσα, το Σ.Τ. είναι το διάστημα $[f(a), f(\beta)]$
ιι) αν f γνήσια φθίνουσα, το Σ.Τ. είναι το διάστημα $[f(\beta), f(a)]$

Σχόλιο 2: Μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο σχόλιο και στις περιπτώσεις, στις οποίες κάποιο από τα άκρα του Πεδίου Ορισμού είναι ανοικτό, με τη βοήθεια ορίων. Επίσης και σε ένωση διαστημάτων.

Σχόλιο 3: Με τη βοήθεια του Σ.Τ. μπορούμε να βρούμε αν η συνάρτηση έχει ακρότατα.

ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.Ε.Τ.

1η ΜΟΡΦΗ

[έλεγχος αν υπάρχει κάποια τιμή της συνάρτησης]

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{25}-\eta\mu(\pi x)+8, x\in[-5,5]$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0\in(-5,5)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\frac{11}{2}$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, με $f(-5)=3$ και $f(5)=13$.
Επειδή το 11/2 περιέχεται μεταξύ των τιμών αυτών, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ., υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-5,5)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\frac{11}{2}$.

<u>Σχόλιο</u>: Η άσκηση μπορεί επίσης να αντιμετωπισθεί με τη βοήθεια του Θ. Bolzano, για τη συνάρτηση με τύπο $g(x)=f(x)-\frac{11}{2}$ στο ίδιο διάστημα.

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α, β], γνήσια φθίνουσα και $x_1, x_2, x_3 \in$ [α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ (α, β) έτσι ώστε $f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο [α, β] και γνήσια φθίνουσα, άρα $f(\beta)<f(a)$. Δηλαδή $f(a)\neq f(\beta)$, επομένως ισχύει το Θ.Ε.Τ. και επιπλέον το Σ.Τ. της συνάρτησης είναι το κλειστό διάστημα $[f(\beta), f(a)]$. Έτσι έχουμε:

$$x_1 \in [a,\beta] \Rightarrow f(\beta)\le f(x_1)\le f(a)$$
$$x_2 \in [a,\beta] \Rightarrow f(\beta)\le f(x_2)\le f(a)$$
$$x_3 \in [a,\beta] \Rightarrow f(\beta)\le f(x_3)\le f(a)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη:

$$3f(\beta)\le f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\le 3f(a)$$
$$f(\beta)\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\le f(a)$$

Δηλαδή η τιμή $\eta=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$ ανήκει στο Σύνολο Τιμών της συνάρτησης, επομένως σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα $x_0 \in$ (α, β) έτσι ώστε $f(x_0)=\eta$.

<u>Παράδειγμα 3^ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to Q$ (σύνολο των Ρητών), συνεχής με $f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{5}{8}$. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{5}{8}$ για κάθε $x\in[0,1]$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι σταθερή, επομένως θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαφορετικές τιμές $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $f(x_1)\neq f(x_2)$. Έτσι αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]\subseteq$ [0,1], σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1), f(x_2)$. Άρα $[f(x_1), f(x_2)]\subseteq Q$ (ή $[f(x_2), f(x_1)]\subseteq Q$), κάτι που είναι άτοπο, διότι σε κάθε διάστημα με άκρα πραγματικούς αριθμούς, περιέχεται άρρητος αριθμός.

Επομένως η συνάρτηση είναι σταθερή και επειδή μία τιμή της είναι το 5/8, θα είναι $f(x)=\frac{5}{8}$ για κάθε $x\in$ [0,1].

<u>2η ΜΟΡΦΗ</u>

[εύρεση ρίζας εξίσωσης με τη βοήθεια του Συνόλου Τιμών]

<u>Παράδειγμα</u>

Να δείξετε ότι η εξίσωση lnx +α x = 0, με α > 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο f (x) = lnx + α x, x > 0 η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Αρχικά ελέγχουμε τη μονοτονία της συνάρτησης (*).
Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε επειδή η συνάρτηση g (x) = lnx είναι γνήσια αύξουσα, έχουμε: $\ln x_1 < \ln x_2$ (1). Επίσης επειδή α > 0, έχουμε: $a \cdot x_1 < a \cdot x_2$ (2).
Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) : $\ln x_1 + a \cdot x_1 < \ln x_2 + a \cdot x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο Πεδίο Ορισμού της.
Στη συνέχεια βρίσκουμε τις οριακές τιμές της συνάρτησης, στα άκρα του Πεδίου Ορισμού της. Έτσι έχουμε: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\ln x + a \cdot x) = -\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
Επομένως βρέθηκε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης, που είναι το διάστημα $(-\infty,+\infty)$, δηλαδή το σύνολο R.
Επειδή ο αριθμός 0 ανήκει στο Σ.Τ. της συνάρτησης, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,+\infty)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση lnx + α x = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα το x_0.

(*) <u>Σχόλιο</u>: Στη συνέχεια η μονοτονία θα ελέγχεται με τη βοήθεια της παραγώγου.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Με τη βοήθεια της μονοτονίας εξασφαλίζουμε επίσης, τη μοναδικότητα των ριζών μιας εξίσωσης, στα αντίστοιχα διαστήματα. Έτσι αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα, τότε εκεί θα έχει <u>μία το πολύ ρίζα</u>.

Όσον αφορά στη προηγούμενη άσκηση, η ρίζα που βρήκαμε είναι μοναδική, διότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ:

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in$ [α, β], έτσι ώστε αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ να ισχύει: $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in$ [α, β]
Δηλαδή, η συνάρτηση παίρνει στο [α, β] μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

<u>Παράδειγμα</u>

Δίδεται συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in$(α, β), έτσι ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(a) + 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + 3f(\beta)}{6}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

« Το παράδειγμα αυτό δε λύνεται με το Θ.Ε.Τ., διότι δε μπορούμε να δείξουμε ότι η τιμή που μας δίδεται, ανήκει μεταξύ των f (α) και f (β). Επίσης δε ξέρουμε τίποτα για τη μονοτονία της συνάρτησης.»

Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής, ικανοποιείται το θεώρημα Μέγιστης (M) και Ελάχιστης (m) τιμής, άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει: $m \le f(x) \le M$. Οπότε:

$$a \in [a,\beta] \Rightarrow m \le f(a) \le M$$

Επειδή $\quad \dfrac{a+\beta}{2} \in [a,\beta] \Rightarrow m \le f\left(\dfrac{a+\beta}{2}\right) \le M \Leftrightarrow 2m \le 2f\left(\dfrac{a+\beta}{2}\right) \le 2M$

$$\beta \in [a,\beta] \Rightarrow m \le f(\beta) \le M \Leftrightarrow 3m \le 3f(\beta) \le 3M$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις τρεις σχέσεις προκύπτει ότι:

$$6m \le f(a) + 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + 3f(\beta) \le 6M \Leftrightarrow m \le \frac{f(a) + 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + 3f(\beta)}{6} \le M .$$

Έτσι σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. όπως αυτό διαμορφώνεται με τη βοήθεια του Θ. Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$:

$$f(x_0) = \frac{f(a) + 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + 3f(\beta)}{6} .$$

Εφαρμογή:

Αν f συνάρτηση συνεχής στο [α, β] με $f(a) \ne f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$:

$$f(x_0) = \frac{2f(a) + 3f(\beta)}{5} .$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω συνάρτηση f, με $f(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, με $a_0 > 0$, $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$ και $5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 > 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, 1).

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι f (1) = 0, δηλαδή το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης f (x) = 0. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

$$f(x) = (x-1)\cdot\left[a_5 x^4 + (a_4 + a_5)\cdot x^3 + (a_3 + a_4 + a_5)\cdot x^2 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)\cdot x + (a_1 + \cdots + a_5)\right]$$

$\Leftrightarrow f(x) = (x-1)\cdot g(x)$, όπου g (x) η πολυωνυμική συνάρτηση που εμφανίζεται μέσα στην αγκύλη. Η g είναι συνεχής στο διάστημα [0, 1] ως πολυωνυμική με $g(0) = -a_0 < 0$ και $g(1) = 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 > 0$.

Επομένως σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της συνάρτησης g (x), άρα και της f (x), στο διάστημα (0, 1).

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί z = α + β i, $z_1 = a + if(a)$, $z_2 = \beta + if(\beta)$. Αν ισχύει η σχέση $3(z^2 - \bar{z}^2) - 4i \cdot z\bar{z} = 4i \cdot Re(z_1 \bar{z}_2)$, τότε να αποδείξετε ότι η C_f, έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον x΄x.

ΛΥΣΗ

Ισχύουν: $z^2 = a^2 - \beta^2 + 2a\beta \cdot i$, $\bar{z}^2 = a^2 - \beta^2 - 2a\beta \cdot i$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + \beta^2$,
$z_1 \bar{z}_2 = [a\beta + f(a)f(\beta)] + [\beta \cdot f(a) - a \cdot f(\beta)] \cdot i$, οπότε η ισότητα της υπόθεσης γίνεται:
$3 \cdot 4a\beta \cdot i - 4i \cdot (a^2 + \beta^2) = 4i \cdot (a\beta + f(a)f(\beta)) \Leftrightarrow 3a\beta - a^2 - \beta^2 = a\beta + f(a)f(\beta) \Leftrightarrow$
$f(a)f(\beta) = -(a - \beta)^2 < 0$, διότι α < β. Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί το Θ. Bolzano, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in$(α, β) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση ημx = 2 συνx έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, π/2).

2. Αν η συνάρτηση f: [0, 1]→(0, 1) είναι συνεχής, να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = x έχει ρίζα στο διάστημα (0, 1).

3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: συν ξ = – ημ ξ .

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\varepsilon\varphi x}{4x - \pi} + \frac{\sigma\varphi x}{3x - \pi} = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 - 4x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα.

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + a \cdot x^2 + \beta = 0$ με β > 0 και α + β +1 < 0, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (–1, 1).

7. Αν α < β < γ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma} = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες ρ_1, ρ_2, τέτοιες ώστε $a < \rho_1 < \beta < \rho_2 < \gamma$.

8. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α , η εξίσωση ημ x – ημ α = π/2 – x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, π/2).

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $a \cdot x^2 + 2x = a, a \neq 0$ έχει ρίζα στο διάστημα (– 1 ,1) ομόσημη του α.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{16} - \eta\mu(\pi \cdot x) + 7, x \in [-4,4]$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή 7/2.

11. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f: [0,1]→[0,1]. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^3 + x - 3 = 0$. Να δείξετε ότι έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (1, 3).

13. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με α < β. Να δείξετε ότι για κάθε γ ∈ (α, β), υπάρχει ξ∈(0,1) τέτοιο ώστε γ = ξ β + (1 – ξ)α.

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: [α, β] $\to \Re$ και λ, μ >0.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in$ [α, β] τέτοιο ώστε λ f (α) + μ f (β) = (λ + μ)f (γ), όταν f (α) $\neq$ f (β).

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και f (α) $\neq 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (α, β) τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{\xi - a} = \frac{f(a) + f(\beta)}{\beta - a}$

16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-\beta)\cdot(x^{2\kappa}+1)+(x-a)\cdot(x^{2\lambda}+1)=0$ με α < β και κ, λ $\in N^*$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

17. Αν f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [0, 1], τέτοιες ώστε f (0) = g (1), f (1) = g (0) και g (0) $\neq$ g (1), να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ (0, 1): $f(x_0) = g(x_0)$.

18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: [–α, α] $\to$ [–α, α] με α > 0. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in [-a, a]$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = \xi_1$, και ότι υπάρχει $\xi_2 \in [-a, a]$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2) = -\xi_2$.

19. Δίνεται η συνάρτηση με f (x) = ημ x + x , x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να δείξετε ότι παίρνει τιμές μη αρνητικές.

20. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f: [0, 2π] $\to \Re$ με f (0) = f (2π). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ $\in$ (0, 2π): f (ξ) = f (ξ + π), f (0) $\neq$ f (π).

21. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η εξίσωση $x^3 - 3x + a = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα (–1, 1);

22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει ότι f (x + 1) = – f (x), να δείξετε ότι για κάθε $a \in \Re$ υπάρχει ξ $\in [a, a+1]$ τέτοιο ώστε: f (ξ + 1) = f (ξ).

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \mu \cdot x + \kappa$ και $g(x) = -x^2 + \mu \cdot x + \kappa$, με f (α) = g (β) = 0.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον γ $\in$ [α, β] έτσι ώστε: 3 f (γ) + g (γ) = 0.

24. (*) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0, 3] με f ΄(x) > 0 για κάθε $x \in (0,3)$.
Αν 0 < f (0) < 3, να δείξετε ότι:

ι) η ευθεία ψ = – x + 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,3)$.

ιι) υπάρχει μοναδικός αριθμός ξ στο διάστημα (0, 3), τέτοιος ώστε να ισχύει:
$$f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)}{3}.$$

25. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1, 2] με $f(2) \neq 6$. Αν f (1) + f (2) = 8, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in$ (1, 2): $f(x_0) = {x_0}^2 + x_0$.

26. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, 1]. Αν 0 < f (0) < f (1), να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in$ (0, 1): $f(x_0)\cdot[f(0) + f(1)] = 2f(0)f(1)$.

27. Έστω f συνεχής στο διάστημα [α, β].

ι) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{3}{x-a}+\dfrac{1}{x-\beta}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

ιι) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x^2+2004}=\dfrac{4x-5}{x^2-x-2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (–1, 2).

28. Έστω f: [α, β] $\rightarrow \Re$ συνεχής συνάρτηση. Αν α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2-4000x+2001=0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ [α, β]:

$$a\cdot f\left(\frac{2a+\beta}{3}\right)+\frac{a+\beta}{2}\cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)+\beta\cdot f\left(\frac{a+2\beta}{3}\right)=2000f(\xi).$$

29. Δίδεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [–π, π], έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{f^2(x)}{e^2}=1, x\in[-\pi,\pi].$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (–π, π).

30. (*) Δίνεται η εξίσωση $2x^3-9x^2+12x+a=0, a\in(-5,-4)$.
Να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1, 2).

31. Δίδεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν $x_1, x_2, x_3 \in$ [α, β] και κ, λ, μ θετικοί ακέραιοι με κ + λ + μ = 2004, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο διάστημα [α, β]:
$\kappa\cdot f(x_1)+\lambda\cdot f(x_2)+\mu\cdot f(x_3)=2004f(\xi)$.

32. Αν η συνεχής στο R συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη με f (10) = –1 και f (7) = 2, τότε η εξίσωση $f(x^3)=x$ έχει:
Α. μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (–1, 2)
Β. καμία ρίζα στο διάστημα (–1, 2)
Γ. καμία ρίζα στο R.
Να επιλέξετε τη ΣΩΣΤΗ απάντηση.

33. (*) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β], με f ΄(x) > 0 για κάθε $x\in$(α, β). Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 ∈ (α, β): $f(x_0)=\dfrac{f(a)+f(\beta)+f\left(\dfrac{a+\beta}{2}\right)}{3}$.

34. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: [α, β] $\rightarrow \Re$ και οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε κ + λ = 1. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$[α, β]: $f(x_0)=\kappa\cdot f(a)+\lambda\cdot f(\beta)$.

35. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα [2, 3] με f (2) < g (2) < g (3) < f (3), να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο διάστημα (2, 3), τέτοιο ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (2, 3)

36. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0, 1] και ότι ισχύει $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in$[0, 1]. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει την ευθεία της διχοτόμου της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 ∈ [0, 1].

37. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{x}+2\beta\cdot\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{\sqrt{h}-1}{h-1}, 0<x<1 \\ \beta\cdot\left(e^{x^2}+1\right)+x^2-1, x\geq 1\end{cases}$$ με α, β αρνητικούς αριθμούς, συνεχής στο 1.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+a^2x^2+\beta\cdot x+\beta=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1].

38. (*) Δίνονται οι συναρτήσεις f με f (x) = συν x και g με g (x) = (4 Arg (z)) x, όπου z μιγαδικός με $z=\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)+i\cdot\eta\mu\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3\cdot(f\circ g)(x)=\dfrac{x^2}{9}$ έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα μεγαλύτερη του -1.

39. Έστω η συνάρτηση f : $(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=\ln x+x^5-2$.
   ι) Να βρεθεί το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης
   ιι) Να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$
   ιιι) Αν για τη συνάρτηση h : $(0,+\infty)\to\Re$ ισχύει ότι $5\cdot h^2(x)+3\cdot h(x)+5=f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι “1 – 1”.

40. Α). Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα [α, β] με f (α) = g (β) και f (β) = g (α). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in$ [α, β]: $f(x_0)=g(x_0)$.

   Β). Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή, υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων του ισημερινού της γης με την ίδια θερμοκρασία.
   (Θεωρούμε τη συνάρτηση της θερμοκρασίας κατά μήκος του ισημερινού της γης συνεχή).

41. Αν f είναι μία συνάρτηση, τότε λέγοντας χορδή της f εννοούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου τα άκρα ανήκουν στη γραφική παράστασή της. Έστω ότι η f είναι μία συνεχής συνάρτηση με Πεδίο Ορισμού το [0, 1] και με f (0) = f (1) = 0.
   ι) Να δείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος 1/2.
   ιι) Να δείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος 1/ν, όπου ν = 1, 2, 3, 4, …

42. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ της πλευράς ΑΒ, τέτοιο ώστε: (ΜΑ) (ΜΔ) = (ΜΒ) (ΜΓ).
   (Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, με αρχή αξόνων το σημείο Α και Β (α, 0) με α > 0).

43. (*) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο R και τον μιγαδικό z = x +i f (x), x$\in\Re$. Αν ισχύει $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a}{2}, f\left(\dfrac{3a}{2}\right)=-\dfrac{a}{2}$ και για $x\in(0,2a)$ έχουμε ότι $|z-a|\leq a, |2z-a|\geq a$ & $|2z-3a|\geq a$, να δείξετε ότι f (α) = 0.

44. (*) Δίνεται μιγαδικός z της μορφής z = λ +i, λ > 0. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός της παραπάνω μορφής, τέτοιος ώστε ο $z^2+\dfrac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

45. (*) Α. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
   Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+x^2+x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

46. Έστω f συνεχής και $f^2(x) + x \cdot f(x) - 1 = 0$ για κάθε $x \in \Re$ με f (0) = –1 .
    ι) Να δείξετε ότι η συνάρτηση διατηρεί το πρόσημό της στο R.
    ιι) Να βρεθεί ο τύπος της f (x).

47. Αν f συνεχής με $f^2(x) = 4 + x^2 - x + 3 \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \Re$, τότε:
    ι) Να δείξετε ότι η συνάρτηση διατηρεί το πρόσημό της στο R.
    ιι) Να βρεθεί ο τύπος της f (x), αν f (2004) < 0.

48. Έστω η συνάρτηση g με Πεδίο Ορισμού το σύνολο A = [1, 3] και g (A) = (3, 6). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

49. Να αποδείξετε ότι η μη σταθερή συνάρτηση g : $\Re \to Q$ δεν είναι συνεχής.

50. (*) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[1,2] \to (3,+\infty)$ για την οποία ισχύει $\int_1^2 f(x)\,dx = 6$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + 2 = \int_1^x f(t)\,dt$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (1, 2).

51. (*) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(x^2 + 1\right) + x + 1 = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

52. (*) Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x_1 + \psi_1 \cdot i,\ x_1, \psi_1 \in \Re$ τέτοιος, ώστε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού 2i , να ανήκει στην ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z και z i.

    α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

    β) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ *είναι* $f(1) = 1$ *και* $f(0) = \sqrt{2} - 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει κοινό σημείο με το γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος, το Α (α, f(α)).

53. (*) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha, \alpha+1] \to \Re$ τέτοια ώστε να ισχύει $\int_a^{a+1} f(t)\,dt = 1$ και η συνάρτηση $g:[a, a+1] \to \Re$ *με τύπο* $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \cdot \int_x^{a+1} f(t)\,dt$.
    Να αποδείξετε ότι:
    α) $g(x) = \frac{1}{4} - \left(\int_a^x f(t)\,dt - \frac{1}{2}\right)^2$
    β) Η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή την οποία και να βρείτε.

54. (*) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και $\int_a^\beta f(t)\,dt \neq 0$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in (0,1)$, υπάρχει ένας αριθμός $c \in (a, \beta)$, *τέτοιος ώστε* : $\int_a^c f(t)\,dt = \kappa \cdot \int_a^\beta f(t)\,dt.$

55. (*) Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, π], με f ΄΄ συνεχή και f ΄(x) > 0 στο [0, π], έτσι ώστε $\int_0^\pi \left[f(x) + f''(x)\right] \cdot \eta\mu\, x\,dx = 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης G, με G(x) = (π – x) f (x + π) + x f (π – x), $x \in \Re$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (0, \pi)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4η:
ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ – ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{4}$ και η ευθεία $\psi=-1$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f από ένα τυχαίο σημείο της ευθείας είναι κάθετες μεταξύ τους.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in R$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\xi-h)}{h}=2$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ.
3. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=2$.

   Αν είναι $f(\alpha+\beta)=e^{\alpha}f(\beta)+e^{\beta}f(\alpha)$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$, τότε να αποδείξετε ότι:

   α) $f(\nu x)=\nu\, e^{(\nu-1)x}\cdot f(x)$, για κάθε $x\in R,\ \nu\in N^*$

   β) $\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{f(\omega)}{\omega}=2$

   γ) αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)+\alpha\, e^x,\ \ \alpha\in R$
4. Δίνεται συνάρτηση g συνεχής στο πεδίο ορισμού της και συνάρτηση f με $f(x)=|x-3|\,g(x)$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 3.
5. Αν $f(x)=(-x^2+3x+1)\,g(x)$, με $g(-1)=3$ και $\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-3}{x+1}=2$, τότε να βρεθεί η τιμή $f'(-1)$
6. α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f(x^3)=\eta\mu(\pi x)$, να βρεθεί η τιμή $f'(-1)$

   β) Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cdot\left(\eta\mu\frac{1}{x}\right)\cdot(\eta\mu x)}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

   Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $x=0$

   γ) Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

   i) να εξετάσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη συνέχεια

   ii) να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}$
7. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2+\alpha\,x+2,\ \ \alpha\in R$. Να βρεθεί το α, έτσι ώστε να υπάρχουν εφαπτόμενες της C_f οι οποίες να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, με $g(x_0)\neq 0$ και $g'(x_0)\neq 0$. Αν για τη συνάρτηση $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ισχύει $F'(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι $F(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$
9. Να αποδείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, είναι $f^{(\nu)}(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$

10. α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h} = 5$, να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 4$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 4$

11. Έστω συνάρτηση f με $f(x+\psi) = f(x) + f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in R^*$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R^*$

12. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της $f(x) = \begin{cases} x^4, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x < 6 \end{cases}$ στα κοινά τους σημεία με την ευθεία $x - 5\psi + 6 = 0$ είναι κάθετες.

13. Να αποδείξετε ότι αν $\beta < \alpha^2$, τότε από το σημείο Ρ(α, β) διέρχονται δύο εφαπτόμενες της παραβολής $\psi = x^2$.

Αν το σημείο Ρ ανήκει στην ευθεία $\psi = -\frac{1}{4}$, τότε οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

14. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \cdots + \nu\,x^{\nu-1}$, $\nu \in N^*$

15. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $\varphi(x) = \begin{cases} f^2(x) - 1 & , \ x \le 0 \\ g^3(x) + 4g^2(x) - 24 & , \ x > 0 \end{cases}$

Επιπλέον ισχύουν $f(0) = f'(0) = 1$ και $g(0) = 2$, $g'(0) = \frac{1}{14}$

Να βρεθεί το $\varphi'(0)$

16. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+\psi) = \frac{f(x) + f(\psi)}{1 - f(x)f(\psi)}\ , \ \text{για κάθε } x, \psi \in R \text{ και } f(x)f(\psi) \neq 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in R$

β) Αν $f(\lambda) = 0$, $\lambda \in R$ τότε $f(x+\lambda) = f(x)$ για κάθε $x \in R$

γ) Αν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R$, με $f'(x_0) = 1 + f^2(x_0)$

17. Αν η f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 \in R$, τότε να υπολογίσετε το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h) - f(x_0+h)}{h}$

18. Αν $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu\frac{1}{x} \ , & x \neq 0 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$, τότε να μελετηθεί η f' ως προς τη συνέχεια

19. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$, έτσι ώστε $\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 3$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασής της στο σημείο Α(1, f(1)).

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$, έτσι ώστε να ισχύει

$f^2(x) + g^2(x) = x^6 + 2x^3 + 1$, για κάθε $x \in R$

Να αποδείξετε ότι $[f'(-1)]^2 + [g'(-1)]^2 = 9$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(0) = f'(0) = 0$ και η συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\sigma\upsilon\nu(\ln|x|), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν:

i) $f(x\,\psi) = f(x)f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in (0, +\infty)$

ii) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 > 0$ και ισχύει ότι $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} f(x_0)f'(1)$

23. Για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $g(x) = f(x) - x$.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $A\big(x_0, f(x_0)\big)$, $B\big(x_0, g(x_0)\big)$ αντίστοιχα, τέμνονται σε σημείο Μ του άξονα ψ΄ψ

24. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x΄x, τότε τον τέμνει με γωνία 45^{o}

25. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{d^2}{dx^2}\left[x\, f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x^{-3} f''\left(\frac{1}{x}\right)$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

β) $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x^2 + k}\,\right) = k\,(x^2 + k)^{-3/2}$

26. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με $f'(1) = 2$ και για κάθε $x, \psi \in R^*$ ισχύει ότι $f(x\,\psi) = f(x) + f(\psi) - (x-1)(\psi - 1)$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο R^* και να βρείτε τον τύπο της.

27. Έστω $|f(x) - \ln x| \leq (x-1)^2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$

28. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ και το σημείο της $M\big(\lambda, f(\lambda)\big)$, με $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Έστω P η προβολή του Μ στον άξονα χ΄χ και Τ το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f στο Μ με τον άξονα ψ΄ψ.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΤΜΡ είναι ανεξάρτητο του λ.

29. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha\, \ln x + \mu^2 x, & x \geq 1 \\ x^2 + \nu\, x + \alpha, & x < 1 \end{cases}$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, τότε να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Α(μ, ν) είναι μια ισοσκελής υπερβολή.

30. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε $P(0) = 3$ και $\big(P'(x)\big)^2 P''(x) = 32\,(P(x) - 3)$, $x \in R$

31. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$, με $f(0) = g(0)$ και $f(x) + x > g(x)$, $x \in R^*$

Να αποδείξετε ότι $g'(0) - f'(0) = 1$

32. Έστω f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$. Να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

33. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \begin{cases} f(x)\,\eta\mu\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, όπου η f είναι συνάρτηση

ορισμένη στο R, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f(0) = 0$ και $f'(0) = 0$

α) να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο x = 0

β) να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\,\eta\mu\frac{\pi}{x} - \eta\mu 2x}{2x - \eta\mu x}$

34. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $f(0) = 0$

ii) $|f(x)| \geq \sqrt{|x|}$, για κάθε $x \in R$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

35. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R, με $f(0) = f'(0) = 0$.

α) Αν $g(x) = \begin{cases} f(x)\,\eta\mu\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, να βρείτε την $g'(0)$

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} \left(f(x)\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$

36. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ = (–1,1) και παραγωγίσιμες στο x = 0 με f (0) = 0. Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f^2(x) - g^2(x) = x \cdot \eta\mu 2x$, τότε να αποδείξετε ότι $(f'(0))^2 - (g'(0))^2 = 2$

37. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 και ισχύει:

$f^2(x) + 2f(-x)\eta\mu x = -\ln(1 + x^2)$, $x \in R$

Να βρείτε το $f'(0)$

38. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και συνεχής στο $x_0 = 4$.

Αν $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 2} = l \in R$ και $g(x) = x^2 f(x)$, να υπολογίσετε το $g'(4)$

39. Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$, η οποία ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

α) $x = t^5 + 2t$ και $\psi = 6t^3$

β) $x = \alpha\,\eta\mu^3\theta$ και $\psi = \alpha\,\sigma\upsilon\nu^3\theta$, α σταθερά, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

40. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $h(x) = [f(e^x)]^3$, β) $\varphi(x) = f(f(\eta\mu x))$, γ) $g(x) = f(\sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu(f(x))$

41. α) Αν f (x) είναι πολυώνυμο βαθμού $\nu \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$f(x) = (x - \rho)^2\,\pi(x) \Leftrightarrow f(\rho) = f'(\rho) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι το $(x + 1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x) = x^{2\nu} - \nu\,x^2 + \nu - 1$, $\nu \in N^*$

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε το $(x - 1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x) = \alpha\,x^{2\nu} + \beta\,x^{\nu-1} + 4$, $\nu \in N$, $\nu \geq 2$

42. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(x^3) = 3\,x^4, \ \ x \in R$.
Να βρείτε την $f''(8)$

43. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f(\ln x) = e^x - \ln x\,, \ \ x > 0$. Να αποδείξετε ότι $e^2 f''(-1) = (1+e)e^{1/e}$

44. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή στο R. Να βρείτε την $g''(0)$ αν γνωρίζετε ότι $f'(-1) = -2$ και $g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x - f(\sigma\upsilon\nu x)$

45. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις: $f(x)g(x) = x, \ \ x \in (-1,1)$ και $f(0) = g(0) = 0$

46. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, με f (0) = 0. Αν ισχύει $f'(x) = 1 + f^2(x), \ \ x \in R$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{f''(x)}{f'(x)} = 2f(x), \ \ x \in R$ β) $f'(0) = 1$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ δ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2 \cdot f\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right) = \pi$

47. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, ώστε $P(x) - P'(x) = x^3 + x + 2$

48. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\ln x$. Αν Α είναι το σημείο τομής της C_f με τον άξονα ψ΄ψ και Β το σημείο τομής της C_g με τον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g

49. Έστω $A(x_0, \psi_0)$ κοινό σημείο των C_f, C_g, με $f(x) = e^x\,\eta\mu x\,, \ g(x) = \eta\mu x\,,$ όπου $x \in (-\pi, \pi)$.
Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, \psi_0)$

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$ και τα σημεία $A\big(x_0, f(x_0)\big), \ B\big(x_0, g(x_0)\big)$.
Η εφαπτομένη της C_f στο Α τέμνει τον x΄x στο σημείο Γ και η εφαπτομένη της C_g στο Β τέμνει τον x΄x στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right| = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$

β) το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές

γ) το Β είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΔΓ

51. Έστω f, g, φ συναρτήσεις, ορισμένες στο R, για τις οποίες ισχύουν:

i) η f είναι παραγωγίσιμη, με $f(x) \neq 0, \ \ x \in R$

ii) η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $g(x) = f(x)\,\varphi'(x)$ και $(\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2 = 1$

Αν το $A(x_0, \psi_0)$ είναι κοινό σημείο των C_f, C_g, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν στο Α κοινή εφαπτομένη.

52. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = (x+k)\,e^{-x}, \ \ x, k \in R$

α) Έστω Η το σημείο της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.
Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο στον οποίο κινείται το Η, όταν $k \in R$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$

53. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(α,0). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Α είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + \psi + k = 0,\ k \in R$

54. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $g(x) = f(x) - x$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο R και τα σημεία Α$(x_0, f(x_0))$, Β$(x_0, g(x_0))$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τέμνουν τον άξονα ψ΄ψ στο ίδιο σημείο.

55. Αν $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$ και $g(x) = -x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$, να αποδείξετε ότι σε κάποιο από τα κοινά σημεία των C_f, C_g, αυτές έχουν κοινή εφαπτομένη.

56. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο R, με $f(x) \neq 0$. Επιπλέον η συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu(\alpha x),\ \alpha \neq 0$ και $A(x_0, \psi_0)$ ένα κοινό σημείο των C_f, C_g.
Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται στο σημείο Α κοινή εφαπτομένη.

57. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = x^2 - 2k \cdot \ln x$, $k \neq 0$ και $C(k)$ η γραφική της παράσταση.
α) Να βρείτε για ποια τιμή του k, η $C(k)$ δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x
β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των $C(k)$, $k \in R^*$ στα σημεία με την ίδια τετμημένη $x_0 > 0$, διέρχονται από σταθερό σημείο.

58. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{kx^2}$, $k > 0$
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο σημεία Α και Β της C_f, στα οποία οι εφαπτόμενές της διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Α και Β

59. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 = 2$
β) Να ελέγξετε αν υπάρχει άλλο σημείο της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την (ε)
γ) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ, έτσι ώστε οι ευθείες $\psi = -x + \kappa$ να τέμνουν τη C_f σε δύο σημεία Μ και Ν. Στη συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ

60. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 6x^2 + k$, $k \in R$
α) Αν $f'(x_0) = 0$, τότε να δείξετε ότι από το σημείο Α$(x_0, f(x_0))$ διέρχονται τρείς διαφορετικές εφαπτόμενες της συνάρτησης
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτόμενων, έχει εμβαδόν ανεξάρτητο του k.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι μόνο σε ένα σημείο της, ο ρυθμός μεταβολής της ισούται με την τιμή της στο σημείο αυτό.

62. Μια κυκλική πισίνα έχει ακτίνα r = 20m.Ένας άνθρωπος βαδίζει γύρω από αυτήν με ταχύτητα $v = 50\ m/min$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής AB, όταν το αντίστοιχο τόξο AB που έχει διανύσει ο άνθρωπος έχει μέτρο 60^o
63. Μία ευθεία (ε) με θετική κλίση στρέφεται γύρω από το σημείο M(1,3), έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της να είναι $\frac{1}{9}/sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Α, Β είναι τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες και Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία η (ε) διέρχεται από το σημείο $N\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
64. Οι ακμές ενός κύβου διαστέλλονται, έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του κύβου να είναι $240\ cm^2/sec$. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακμή του κύβου είναι 10 cm, να υπολογίσετε:
    α) το ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου
    β) το ρυθμό μεταβολής των ακμών του κύβου
65. Σώμα μάζας $m = 2\ kgr$ εκτοξεύεται από ένα σημείο στο έδαφος. Η κίνησή του κατά την οριζόντια διεύθυνση περιγράφεται από την εξίσωση $x = 6t$, ενώ κατά την κατακόρυφη από την εξίσωση $\psi = 38t - 5t^2$, όπου x,ψ σε m και t σε sec. Να βρεθεί η ορμή του μετά από 3 sec
    (Ορμή $J = m \cdot v$)
66. Ένα υλικό σημείο Μ, κινείται στο θετικό ημιάξονα Οx ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων, από την αρχή Ο(0,0) προς το σημείο Α(α,0), α > 0. Η θέση του σημείου Μ κάθε χρονική στιγμή t, δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = v \cdot t,$ όπου $v = k\ cm/sec$ και προβάλλεται σε ευθεία (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ίση με 30^o. Αν Λ είναι η προβολή του σημείου Μ πάνω στην (ε), τότε να βρείτε:
    α) το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΛ ως συνάρτηση του χρόνου
    β) το ρυθμό μεταβολής του προηγούμενου εμβαδού Ε(t), τη χρονική στιγμή που το σημείο Μ θα βρεθεί στο σημείο Α
67. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10$.
    Α) Να αποδείξετε ότι: $i)\ f(3) = 7,$ $ii)\ f'(3) = 5$
    Β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο σημείο της $M(3, f(3))$
    α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $\psi = 5x - 8$
    β) Ένα σημείο Σ, με τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται πάνω στην ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

68. Η εικόνα Μ ενός μιγαδικού z κινείται διαγράφοντας την καμπύλη:

$$C: \psi = 2e^{2x}, \ \ x \in R$$

α) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης C, στο οποίο οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του Α είναι ίσοι με $\kappa \neq 0$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας μιγαδικός z, ώστε ο μιγαδικός $w = z^2 + \frac{1}{z}$ να είναι φανταστικός αριθμός

69. Α) Σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται κατά 5 μον/sec. Θεωρούμε το ορθογώνιο με διαγώνιο ΟΜ και πλευρές πάνω στους άξονες Οx, Οψ. Βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδόν του ορθογωνίου, όταν x = 9.

Β) Δίνεται συνάρτηση f, έτσι ώστε $|f(x) - a^x| \leq x^2,$ για κάθε $x \in R$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο A(0,f(0)), (α > 0)

ΕΝΟΤΗΤΑ 5η:
ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

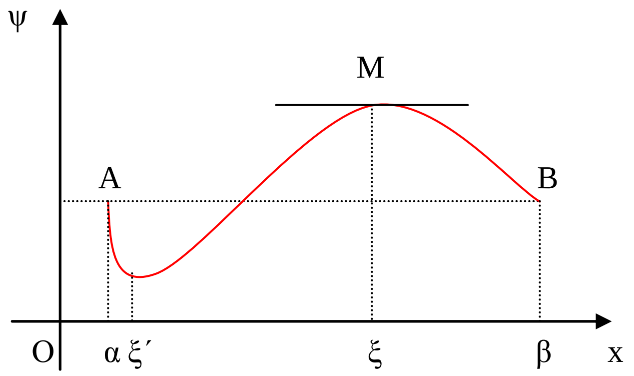
Θεώρημα Rolle:

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi) = 0$.

<u>Σχόλιο</u>: Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα.



Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle:
Αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η ευθεία που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

<u>Παρατηρήσεις:</u>
1. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε δεν ισχύει το Θ. Rolle.
2. Δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα, στο ίδιο διάστημα, τα θεωρήματα Bolzano και Rolle.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 1^{ο}

Εφαρμογές του Θ. Rolle

1. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle και στη περίπτωση που ισχύουν να υπολογίσετε το ξ για το οποίο είναι $f'(\xi)=0$.

α) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$ στο διάστημα [-1 ,1]

β) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ στο διάστημα [-1 ,1]

Λύση

α) Η f ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ D_f=\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ * και θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο 0.
  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3=0$, $f(0)=0$
  Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής στο R, οπότε και στο διάστημα [-1 ,1].

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ $\mu\varepsilon$ $f'(x)=2x$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\tau o$ $(0,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $f'(x)=3x^2$.
  Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει στο 0.
  $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$
  Επομένως η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0 και μάλιστα $f'(0)=0$, οπότε και στο [-1 ,1].
  Επιπλέον έχουμε ότι: $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 3x^2, & x>0 \end{cases}$

- Έχουμε ότι $f(-1)=f(1)=1$

Επομένως για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα [-1 ,1], οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$: $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi=0$.

β) Η f ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ D_f=\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\cdot\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$$

Επομένως για τη συνάρτηση δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις ώστε να ισχύει το Θ. Rolle.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x\le 0 \\ \gamma x^2+4x+4, & x>0 \end{cases}$

α) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α ,β ,γ , ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στη συνάρτηση f στο διάστημα [–1 ,1].

β) Στη συνέχεια βρείτε $\xi\in(-1,1)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

<u>Λύση</u>

α) Αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα [–1 ,1], έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο [-1 ,1], άρα και στο 0. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ (1).

  Έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+\alpha x+\beta\right)=\beta$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\gamma x^2+4x+4\right)=4$, $f(0)=\beta$

  Από την (1) λοιπόν ισχύει: β = 4

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-1 ,1), άρα και στο 0.

  Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\in\mathbb{R}$ (2).

  Έχουμε ότι:

  $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\cdot(x+\alpha)}{x}=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma x^2+4x+4-\beta}{x}\overset{\beta=4}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot(\gamma x+4)}{x}=4$

  Από τη (2) λοιπόν ισχύει: α = 4

- Επίσης έχουμε ότι $f(-1)=f(1)\Rightarrow 1-\alpha+\beta=\gamma+8\Leftrightarrow\gamma=-\alpha+\beta-7\Leftrightarrow\gamma=-4+4-7\Leftrightarrow$ γ = -7

Έτσι οι ζητούμενες τιμές είναι: α = 4 , β = 4 και γ = – 7 .

β) Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο συνάρτηση: $f'(x)=\begin{cases} 2x+4, & x\le 0 \\ -14x+4, & x>0 \end{cases}$

Αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1): f'(\xi)=0$.

- Για $x\in\left(-1,0\right]$ *είναι*: $2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$, η οποία δεν είναι αποδεκτή.
- Για $x\in\left(0,1\right)$ *είναι*: $-14x+4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{7}$, η οποία είναι αποδεκτή ως λύση.

Επομένως στο σημείο $M\left(\dfrac{2}{7}, f\left(\dfrac{2}{7}\right)\right)$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

ΜΕΡΟΣ 2ο

Όταν ζητάμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα, εφαρμόζουμε το Θ. Rolle και τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x+8-\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x)=3x+8-\sigma\upsilon\nu x$.
Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση έχει δύο ρίζες, έστω $\rho_1,\rho_2 \;\; \mu\varepsilon \;\; \rho_1<\rho_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ (1)
Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) $\mu\varepsilon$ $f'(x)=3+\eta\mu x$, τότε λόγω της (1), ισχύει το Θ. Rolle.
Έτσι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2): f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi=-3$. Η εξίσωση όμως είναι αδύνατη, επομένως καταλήγουμε σε ΑΤΟΠΟ.
Άρα η ζητούμενη εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\nu}+\alpha x+\beta=0$, όπου ν θετικός ακέραιος, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x)=x^{2\nu}+\alpha x+\beta$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση έχει τρεις ρίζες, έστω $\rho_1,\rho_2,\rho_3 \;\; \mu\varepsilon \;\; \rho_1<\rho_2<\rho_3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ (1)
Ως πολυωνυμική η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το R, άρα και στα επιμέρους διαστήματα $[\rho_1,\rho_2] \;\; \kappa\alpha\iota \;\; [\rho_2,\rho_3]$.
Επομένως, λόγω της (1) ισχύει το Θ. Rolle σε κάθε ένα από τα δύο διαστήματα, οπότε υπάρχουν

$$\xi_1\in(\rho_1,\rho_2): f'(\xi_1)=0 \Leftrightarrow 2\nu\xi_1^{2\nu-1}+\alpha=0 \Leftrightarrow \xi_1^{2\nu-1}=-\frac{\alpha}{2\nu} \quad (2),$$

$$\xi_2\in(\rho_2,\rho_3): f'(\xi_2)=0 \Leftrightarrow 2\nu\xi_2^{2\nu-1}+\alpha=0 \Leftrightarrow \xi_2^{2\nu-1}=-\frac{\alpha}{2\nu} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε: $\xi_1^{2\nu-1}=\xi_2^{2\nu-1} \Leftrightarrow \xi_1=\xi_2$
Αυτό όμως είναι ΑΤΟΠΟ, γιατί ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα και επομένως $\xi_1\neq\xi_2$.
Άρα η ζητούμενη εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \;\; \mu\varepsilon \;\; \alpha\neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 3\alpha^2<8\beta$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 δε μπορεί να έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση έχει και τις τέσσερις ρίζες της πραγματικές και άνισες. Δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4 \;\; \mu\varepsilon \;\; \rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=f(\rho_4)=0$.

Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το R, άρα και σε κάθε επιμέρους διάστημα, με $f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x+\gamma,\; x\in\mathbb{R}$.
Επομένως ισχύει το Θ. Rolle σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],[\rho_3,\rho_4]$, με αποτέλεσμα να υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2): f'(\xi_1)=0$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3): f'(\xi_2)=0$, $\xi_3\in(\rho_3,\rho_4): f'(\xi_3)=0$.

Η παράγωγος συνάρτηση f ΄ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f''(x)=2\left(6x^2+3\alpha x+\beta\right)$, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$, $[\xi_2,\xi_3]$.

Επομένως υπάρχουν $\mu_1 \in (\xi_1, \xi_2): f''(\mu_1) = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \mu_2 \in (\xi_2, \xi_3): f''(\mu_2) = 0$

Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 3\alpha x + \beta = 0$ έχει δύο λύσεις. Υπολογίζοντας όμως τη διακρίνουσα, έχουμε ότι $\Delta = 3\left(3\alpha^2 - 8\beta\right) < 0$, άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση είναι αδύνατη.

Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε ΑΤΟΠΟ. Έτσι η δοθείσα εξίσωση δε μπορεί να έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες.

<u>ΜΕΡΟΣ 3^{ο}</u>

Όταν ζητάμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα, εφαρμόζουμε το ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE για μια συνάρτηση F για την οποία ισχύει ότι:

F΄(x) = f (x) (μία παράγουσα – αρχική συνάρτηση της f)

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$ (1) έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα (1 ,2).

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με $F(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x \;\; \mu\varepsilon \;\; D_F = R$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $F'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$.

Για τη συνάρτηση F ισχύουν:

- Η F είναι συνεχής στο διάστημα [1,2]
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (1,2)
- F(1) = 6 , F(2) = 6. Δηλαδή F(1) = F(2).

Επομένως βάσει του Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2): F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi^3 - 9\xi^2 - 2\xi + 9 = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (1,2).

2. Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ παραγωγίσιμη και οι συναρτήσεις:

$$F(x) = f(\alpha) \cdot x + e^{\alpha} \quad \kappa\alpha\iota \quad G(x) = f(\beta) \cdot x + e^{\beta} \;, \;\; \alpha < \beta$$

για τις οποίες ισχύει ότι $F \circ G = G \circ F$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in R \;\; \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o \;\; \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \;\; f(\xi) - f'(\xi) = 1$.

<u>Λύση</u>

Αρχικά εργαζόμαστε με σκοπό να δημιουργήσουμε μία χρησιμότερη σχέση, η οποία θα μας βοηθήσει στην επίλυση της εξίσωσης $f(x) - f'(x) = 1$.

Επειδή οι συναρτήσεις F και G έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R, έχουμε:

$$F \circ G = G \circ F \Leftrightarrow F\left(G(x)\right) = G\left(F(x)\right), \;\; \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; x \in R \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha)\left[f(\beta)x + e^{\beta} \right] + e^{\alpha} = f(\beta)\left[f(\alpha)x + e^{\alpha} \right] + e^{\beta} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) f(\beta)x + f(\alpha)e^{\beta} + e^{\alpha} = f(\beta) f(\alpha)x + f(\beta)e^{\alpha} + e^{\beta}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει πάντα, αν και μόνο αν: $f(\alpha)e^{\beta} + e^{\alpha} = f(\beta)e^{\alpha} + e^{\beta}$ (1)

Για να δημιουργήσουμε τις προϋποθέσεις εφαρμογής του Θ. Rolle, απομονώνουμε το α από το β στα δύο μέλη της ισότητας. Αυτό θα μας βοηθήσει επιπλέον να ανακαλύψουμε τη συνάρτηση για την οποία θα εφαρμόσουμε το θεώρημα.

Η (1) γίνεται λοιπόν:

$$f(\alpha)e^{\beta}-e^{\beta}=f(\beta)e^{\alpha}-e^{\alpha}\Leftrightarrow e^{\beta}\left(f(\alpha)-1\right)=e^{\alpha}\left(f(\beta)-1\right)\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)-1}{e^{\alpha}}=\frac{f(\beta)-1}{e^{\beta}}\quad(2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h $\mu\varepsilon$ $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{e^{x}}$, $x\in[\alpha,\beta]$ η οποία είναι συνεχής , παραγωγίσιμη και λόγω της (2) ισχύει h (α) = h (β).

Τότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο ισχύει:

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)e^{\xi}-e^{\xi}\left[f(\xi)-1\right]}{e^{2\xi}}=0\Leftrightarrow f'(\xi)-\left[f(\xi)-1\right]=0\Leftrightarrow f(\xi)-f'(\xi)=1.$$

3. Δίδεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α ,β] , παραγωγίσιμη στο διάστημα (α ,β) και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=e^{\alpha-\beta}f(\alpha)+3i$ $\kappa\alpha\iota$ $w=-f(\beta)-i$.
   Αν ισχύει ότι $\mathrm{Re}(z-\overline{w})=2f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο διάστημα (α ,β) τέτοιο ώστε να είναι $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

<u>Λύση</u>

Είναι: $\overline{w}=-f(\beta)+i$, $o\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $z-\overline{w}=\left[e^{\alpha-\beta}f(\alpha)+f(\beta)\right]+2i$

Έχουμε: $\mathrm{Re}(z-\overline{w})=2f(\beta)\Leftrightarrow e^{\alpha-\beta}f(\alpha)+f(\beta)=2f(\beta)\Leftrightarrow\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow e^{\alpha}f(\alpha)=e^{\beta}f(\beta)$ (1)

Η τελευταία σχέση μας δίνει το ερέθισμα να εφαρμόσουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x)=e^{x}f(x)$.

Η g είναι συνεχής στο [α ,β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α ,β) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με

$$g'(x)=e^{x}\left(f(x)+f'(x)\right)$$

Λόγω της (1) g (α) = g (β).

Επομένως για τη g στο διάστημα [α ,β] ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta):g'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+f'(\xi)=0$.

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 6η:</u>
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Θ.Μ.Τ.)</u>

Θεώρημα Μέσης Τιμής:

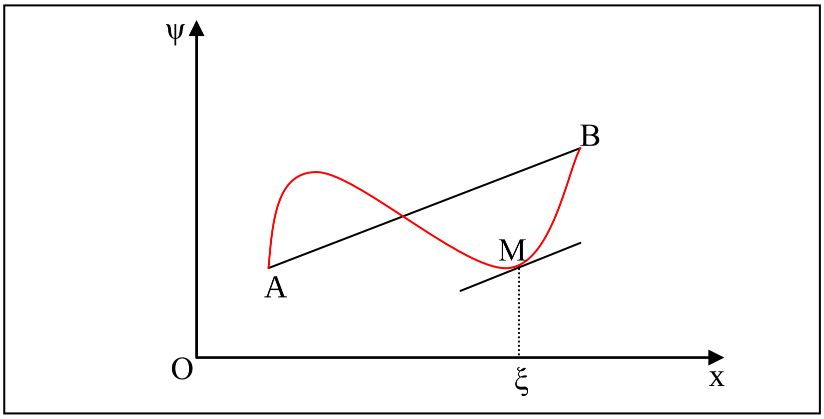
Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α ,β]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α ,β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Σχόλιο : Είναι προφανές ότι το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.

Αυτό σημαίνει ότι η αντιμετώπιση πολλών ασκήσεων θεωρητικής κυρίως μορφής, είναι κοινή με τη βοήθεια των δύο θεωρημάτων.



Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. :

Αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η ευθεία που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο Μ (ξ , f (ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, όπου Α (α , f (α)) και Β (β , f (β)).

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 1^{o}

Εφαρμογές του Θ.Μ.Τ.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha-x^2}{2}, & 0\le x<1\\[2mm] \dfrac{\beta}{x}\ , & 1\le x\le 2\end{cases}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ξ του θεωρήματος.

<u>Λύση</u>

Η f είναι συνεχής στο [0 ,2] άρα και στο 1. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2\alpha-x^2}{2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\beta}{x}\Leftrightarrow\frac{2\alpha-1}{2}=\beta\ \ (1)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 ,2) άρα και στο 1. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{2\alpha-x^2}{2}-\beta}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{\beta}{x}-\beta}{x-1}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{2\alpha-x^2}{2}-\dfrac{2\alpha-1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\beta(x-1)}{x(x-1)}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\beta}{x}\Leftrightarrow 1=\beta$$

Από την (1) προκύπτει ότι $\alpha=\dfrac{3}{2}$.

Επιπλέον η παράγωγος συνάρτηση είναι: $f'(x)=\begin{cases}-x\ , & 0\le x<1\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1\le x\le 2\end{cases}$

Αφού ισχύει το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο διάστημα (0 ,2) τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=-\dfrac{1}{2}$

$$\text{Αν}\ \ 0<x<1\ \ \text{έχουμε}:\xi=\frac{1}{2}$$

$$\text{Αν}\ \ 1\le x<2\ \ \text{έχουμε}:-\frac{1}{\xi^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\xi=\sqrt{2}$$

Επομένως υπάρχουν δύο λύσεις του προβλήματος.

<u>ΜΕΡΟΣ 2^o</u>

Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. μπορούμε να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις (βλ. ειδικό κεφάλαιο: Ανισότητες στην Ανάλυση).

1. Να αποδείξετε ότι $e^{\alpha}\left(\beta-\alpha\right)<e^{\beta}-e^{\alpha}<\left(\beta-\alpha\right)e^{\beta}$, $\alpha<\beta$

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x)=e^{x}$. Για τη g ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα [α ,β]
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α ,β), με $g'(x)=e^{x}$.

Επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):g'\left(\xi\right)=\dfrac{g\left(\beta\right)-g\left(\alpha\right)}{\beta-\alpha}$

Δηλαδή $e^{\xi}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$ (1)

Αλλά $\alpha<\xi<\beta\overset{g}{\Leftrightarrow}e^{\alpha}<e^{\xi}<e^{\beta}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}e^{\alpha}<\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}\Leftrightarrow\left(\beta-\alpha\right)e^{\alpha}<e^{\beta}-e^{\alpha}<\left(\beta-\alpha\right)e^{\beta}$

2. Δίδονται οι συναρτήσεις f ,g ορισμένες και συνεχείς στο κλειστό διάστημα [0 ,1] , παραγωγίσιμες στο (0 ,1). Αν ισχύει ότι $f(0)=g(1)=1\quad \kappa\alpha\iota\quad 1000\leq f'(x)\leq 1001$, $1001\leq g'(x)\leq 1003$

   να αποδείξετε ότι: $2001\leq f(1)-g(0)\leq 2004$

<u>Λύση</u>

Για τις συναρτήσεις f , g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0,1], επομένως υπάρχουν

$$\xi_1,\xi_2\in\left(0,1\right):f'\left(\xi_1\right)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-1\quad \kappa\alpha\iota\quad g'\left(\xi_2\right)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1-g(0)$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε:

$$1000\leq f'\left(\xi_1\right)\leq 1001\Leftrightarrow 1000\leq f(1)-1\leq 1001\Leftrightarrow 1001\leq f(1)\leq 1002\quad (1)$$
$$1001\leq g'\left(\xi_2\right)\leq 1003\Leftrightarrow 1001\leq 1-g(0)\leq 1003\Leftrightarrow 1000\leq -g(0)\leq 1002\quad (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$2001\leq f(1)-g(0)\leq 2004$$

<u>ΜΕΡΟΣ 3^{ο}</u>

Το Θ.Μ.Τ. όπως είναι γνωστό είναι γενίκευση του Θ. Rolle. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ασκήσεις που αντιμετωπίζονται με την ίδια λογική, όπως αυτές στις οποίες ζητείται να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας ή περισσοτέρων τιμών που επαληθεύουν μία ισότητα.

1. Δίδεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [α ,β] και παραγωγίσιμη στο (α ,β). Αν f (x) > 0 για κάθε x στο [α ,β], να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α ,β) τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$$

<u>Λύση</u>

Αρχικά εργαζόμαστε πάνω στην τελική ισότητα, με σκοπό να καταλήξει σε μορφή που να είναι ευκολότερη η αναγνώριση της συνάρτησης για την οποία θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ.

Έτσι έχουμε: $\ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \ln e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \Leftrightarrow \ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(\alpha-\beta) \quad (1)$

Η (1) μας δίνει το ερέθισμα να θεωρήσουμε συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$, για την οποία ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο [α ,β] ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f (x) και lnx.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α ,β) με $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει ξ στο (α ,β), τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln f(\alpha) - \ln f(\beta)}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(\alpha-\beta)$$

2. Δίδεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α ,β] , παραγωγίσιμη στο (α ,β) με f (α) = f (β). Έστω γ στο (α ,β) έτσι ώστε οι αριθμοί α ,γ ,β με τη σειρά που δίδονται να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

   Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

<u>Λύση</u>

Όταν προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο αριθμών ξ, πρέπει να χωρίσουμε το διάστημα που μας δίδεται σε δύο τμήματα. Τα δεδομένα της άσκησης ή πιθανόν προηγούμενο ερώτημα, μας δίνουν μία νύξη για τον τρόπο με τον οποίο θα χωρίσουμε το διάστημα.

Στην παρούσα άσκηση είναι λογικό να εργασθούμε στα διαστήματα [α ,γ] και [γ ,β].

Για τους α ,γ ,β ισχύει επιπλέον ότι $2\gamma = \alpha + \beta \Leftrightarrow \gamma - \alpha = \beta - \gamma$

Είναι προφανές ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f σε κάθε ένα από τα διαστήματα [α ,γ] και [γ ,β].

Επομένως υπάρχουν:

$$\xi_1 \in (\alpha,\gamma): f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} \quad (1),$$

$$\xi_2 \in (\gamma,\beta): f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)+f(\beta)-f(\gamma)}{\gamma-\alpha} = 0$$

3. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α ,β] με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $2f'(\xi) = f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο [α ,β]. Έτσι ισχύει το Θ.Μ.Τ. ,

επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta): f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1)

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. και στα επιμέρους διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$. Άρα

υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right): f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right): f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Τότε έχουμε ότι: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2\,\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \overset{(1)}{=} 2f'(\xi)$

Υπάρχει το ενδεχόμενο το ξ να συμπίπτει με κάποιο από τα ξ_1,ξ_2. Και στην περίπτωση αυτή όμως ικανοποιείται η δοθείσα σχέση.

<u>Σχόλιο</u>: Σε αρκετές περιπτώσεις χωρίζουμε το διάστημα [α ,β] στο μέσον του.

4. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α ,β] και παραγωγίσιμη στο (α ,β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι:

ι) Η εξίσωση $2f(x) = f(\alpha) + f(\beta)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

ιι) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta): \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(a)}$

Λύση

ι) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = 2f(x) - f(\alpha) - f(\beta)$

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γιατί η f είναι συνεχής
- $g(\alpha) = f(\alpha) - f(\beta)$, $g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha)$ και επειδή $f(\alpha) \neq f(\beta)$ *ισχύει* $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, έτσι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta): g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ (1)

ιι) Το προηγούμενο ερώτημα μας δίνει το ερέθισμα να χωρίσουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ με τη βοήθεια του αριθμού x_0.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$.

Έτσι υπάρχουν

$$\xi_1 \in (\alpha, x_0): f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} \overset{(1)}{=} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(x_0 - \alpha)} \quad (2)$$

$$\xi_2 \in (x_0, \beta): f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} \overset{(1)}{=} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\beta - x_0)} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(\beta - x_0) + 2(x_0 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{2(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, 4\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, 4\alpha)$.
   Επιπλέον η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(4\alpha, 2006\alpha)$.
   Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, 4\alpha): f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2006$

Λύση

Θα χωρίσουμε το διάστημα $[\alpha, 4\alpha]$ σε τρία διαστήματα ιδίου πλάτους.

Έτσι για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα:
$[\alpha, 2\alpha]$, $[2\alpha, 3\alpha]$, $[3\alpha, 4\alpha]$.

Οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, 2\alpha), \xi_2 \in (2\alpha, 3\alpha), \xi_3 \in (3\alpha, 4\alpha)$ τέτοια ώστε να ισχύουν αντίστοιχα:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2a)-f(a)}{a}\ ,\quad f'(\xi_2)=\frac{f(3a)-f(2a)}{a}\ ,\quad f'(\xi_3)=\frac{f(4a)-f(3a)}{a}$$

Επίσης όμως έχουμε: f (α) = 0 και f (4α) = 2006 α (1)

Οπότε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\frac{f(4a)-f(a)}{a}\overset{(1)}{=}\frac{2006a}{a}=2006$

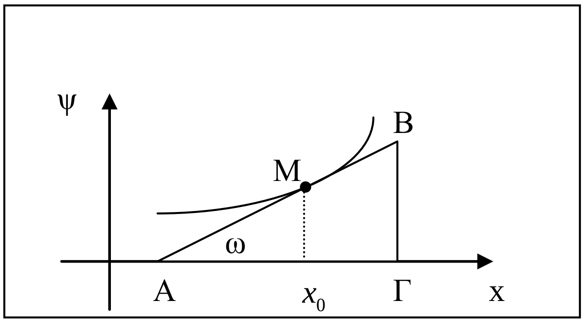
6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot e^{(\beta-\alpha)x},\ x\in R,\ \ 0<\alpha<\beta$ και ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος α και βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη κάθετη πλευρά έχει μήκος β. Η υποτείνουσα του τριγώνου εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{M}(x_0,\psi_0)$. Να αποδείξετε ότι:

ι) $x_0=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}$

ιι) υπάρχει ξ στο διάστημα (α ,β) τέτοιο ώστε να ισούται με τον αντίστροφο του x_0.

<u>Λύση</u>

Για να έχουμε καλύτερη εικόνα του προβλήματος κάνουμε μία υποτιθέμενη γραφική παράσταση.
Έχουμε ότι ΑΓ = α και ΒΓ = β και η γωνία ΒΑΓ = ω.



ι) Για την κλίση της ευθείας ΑΒ ισχύει: $\lambda_{\mathrm{AB}}=\varepsilon\varphi\omega=f'(x_0)$ (1)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{(\beta-\alpha)x}$, $x\in R$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$e^{(\beta-\alpha)x_0}=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow(\beta-\alpha)x_0=\ln\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow x_0=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}$$

ιι) Θεωρούμε συνάρτηση g με g (x) = lnx.

Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [α ,β], επομένως υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta) : g'(\xi) = \dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} \overset{(\iota)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{\xi} = x_0$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 7η:</u>

<u>ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ</u>

Στη διαδικασία εύρεσης μίας τουλάχιστον ρίζας με τη βοήθεια του Θ. Rolle , σχολιάσαμε την έννοια της ΑΡΧΙΚΗΣ (ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ) συνάρτησης.
Το Θεώρημα και το Πόρισμα που ακολουθούν θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα αυτήν την έννοια, προλειαίνοντας ταυτόχρονα το έδαφος για τη διδασκαλία του Αόριστου Ολοκληρώματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύουν οι προυποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Δηλαδή $f(x) = c$ (c σταθερά) για κάθε x στο Δ.
   Αυτό σημαίνει ότι με τη βοήθεια του θεωρήματος (και κατάλληλης συνθήκης) μπορούμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης $\psi = f(x)$.

2. ***Γεωμετρική Ερμηνεία***: Η μόνη συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κάθε σημείο της, είναι η σταθερή.

3. Το αντίστροφο του Θεωρήματος ισχύει.

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Έστω δύο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύουν οι προυποθέσεις:

- οι f , g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x στο Δ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Το Πόρισμα χρησιμοποιείται για την επίλυση απλών διαφορικών εξισώσεων. Εξισώσεων στις οποίες ο άγνωστος είναι μία συνάρτηση και στις οποίες υπάρχει τουλάχιστον η πρώτη παράγωγός της.

2. ***Γεωμετρική Ερμηνεία***: Αν οι δύο συναρτήσεις έχουν σε κάθε σημείο τους με την ίδια τετμημένη εφαπτόμενες παράλληλες, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις είναι “ παράλληλες ”, δηλαδή η μία προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης κατά c.
3. Το αντίστροφο του Πορίσματος ισχύει.

4. Το Θεώρημα και το Πόρισμα δεν ισχύουν σε ένωση διαστημάτων, όπως δείχνει το αντιπαράδειγμα:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 3, & x>0\end{cases}, \quad \mu\varepsilon \quad f'(x)=0,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \quad \varepsilon\nu\acute{\omega} \quad f(x)\neq c$$

5. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική συνάρτηση, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

Αποδεικνύεται ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν αρχική συνάρτηση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Συμπληρωματικά καλό είναι να τονίσουμε τη χρησιμότητα της παρακάτω εφαρμογής, στην επίλυση ασκήσεων στις οποίες ζητείται ουσιαστικά η εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης.

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $f'(x)=f(x)$ *για κάθε* $x\in R$.

Τότε αποδεικνύεται, με τη βοήθεια του Θεωρήματος, ότι η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{e^x}=c$ (c σταθερά).

Δηλαδή: $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$ *για κάθε* $x\in R.$

Σχόλιο:

Επίσης ισχύει: $f'(x)=\kappa\cdot f(x),\ x\in R \Rightarrow f(x)=c\cdot e^{\kappa x},\ \kappa\in R.$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x)=-\dfrac{x\cdot f'(x)}{2}\cdot\ln x,\ \ x\in(1,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) \cdot \ln^2 x$ είναι σταθερή για κάθε x >1.
β) Αν f (e) = 3 να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = f'(x)\ln^2 x + 2f(x)\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow g'(x) = f'(x)\ln^2 x - f'(x)\ln^2 x \Leftrightarrow g'(x) = 0\ ,\ \ x > 1$$

Επομένως $g(x) = c,\ \ x > 1$

β) Αφού g (x) = c, έχουμε ότι $f(x)\ln^2 x = c\ ,\ \ x > 1$ (1)
Για x = e η (1) γίνεται f (e) = c, δηλαδή c = 3.
Έτσι από την (1) προκύπτει ότι $f(x) = \dfrac{3}{\ln^2 x}\ ,\ \ x \in (1, +\infty)$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ *με* $|f(x) - f(\psi)| \le |x - \psi|^3$ *για κάθε* $x, \psi \in R$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο R.

Λύση

Έστω τυχαίο σημείο $x_0 \in R$. *Τότε* $|f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0|^3$

Για $x \ne x_0$ *ισχύει*: $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \le |x - x_0|^2 \Leftrightarrow -|x - x_0|^2 \le \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le |x - x_0|^2$

Σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής, επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^2 = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο σημείο του R, άρα και σε κάθε σημείο του R και μάλιστα ισχύει ότι $f'(x) = 0$ *για κάθε* $x \in R$.
Επομένως η f είναι σταθερή στο R.

3. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α ,β] με f ΄΄ (x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (α ,β), εκτός ίσως από ένα σημείο και f ΄ (α) = f ΄ (β) = 0.
Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο [α ,β].

Λύση

Η συνάρτηση f ΄ είναι γνήσια αύξουσα στο [α ,β].
Έτσι έχουμε:

$$x \ge \alpha \Rightarrow f'(x) \ge f'(\alpha) = 0 \quad \textit{και} \quad x \le \beta \Rightarrow f'(x) \le f'(\alpha) = 0$$

Επομένως για κάθε x στο [α ,β] ισχύει ότι f ΄ (x) = 0.

4. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$, με $f'(x^3) = x$, *και* $f(1) = 2$.
Να υπολογίσετε την τιμή f (3).

Λύση

Επειδή η συνάρτηση είναι σύνθετη, προσπαθώντας να δημιουργήσουμε την παράγωγό της, έχουμε:

$$3x^2 f'\left(x^3\right)=3x^3 \Leftrightarrow \left(f(x^3)\right)'=\left(\frac{3}{4}x^4\right)' \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad f(x^3)=\frac{3}{4}x^4+c\,.$$

Έτσι για x = 1, έχουμε ότι f (1) = 3 / 4 + C δηλαδή C = 2 – 3 / 4 = 5 / 4 .

Οπότε $f(x^3)=\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{4} \quad \kappa\alpha\iota \;\; \gamma\iota\alpha \;\; x=\sqrt[3]{3} \quad \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon: f(3)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^4+\frac{5}{4}$

5. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (0 , π / 2) που ικανοποιεί τις συνθήκες:

f (x) > 0 και f (x) ημx – f ΄ (x) συν x = – f (x) συν x (1)

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις που πληρούν τις παραπάνω ιδιότητες.

Λύση

Η σχέση (1) γίνεται f (x) (ημ x + συν x) = f ΄ (x) συν x , οπότε έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=1-\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \left(\ln f(x)\right)'=\left(x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right)'$$

Επομένως $\ln f(x)=x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)+c \Leftrightarrow f(x)=e^{x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)}e^{c} \Leftrightarrow f(x)=\kappa\cdot\frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$, όπου κ σταθερά.

6. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν ότι 2 f (x) – 2 f ΄ (x) = 1 – x και f (0) = 2. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

$$2f(x)+x=2f'(x)+1 \Leftrightarrow 2f(x)+x=\left(2f(x)+x\right)' \Leftrightarrow 2f(x)+x=c\cdot e^x \quad (\text{ εφαρμογή })$$

Για x = 0 έχουμε ότι c = 4.

Επομένως $f(x)=2e^x-\frac{1}{2}x$

7. Να βρείτε όλες τις καμπύλες ψ = f (x) οι οποίες σε κάθε σημείο τους Μ (x , f (x)) έχουν εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης λ = 2 x – 2 . Ποια από αυτές διέρχεται από το σημείο Α (0 ,1);

Λύση

Σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου, έχουμε ότι:

$$f'(x)=2x-2 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2-2x\right)' \Leftrightarrow f(x)=x^2-2x+c$$

Για x = 0 έχουμε ότι c = 1

Επομένως $f(x)=x^2-2x+1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής

1. Έστω συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο [α, β] και (α, β) αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:
   ι) Για τη συνάρτηση G(x) = (x – α)(x – β) $e^{f(x)}$ ισχύει το Θ. Rolle στο [α, β]
   ιι) Υπάρχει ξ $\in$ (α, β) : $f'(\xi)=\dfrac{1}{a-\xi}+\dfrac{1}{\beta-\xi}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ Να δειχθεί ότι :
   ι) Εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $\left[0,\dfrac{2}{2\nu+1}\right], \nu\in N^*$
   ιι) Υπάρχει σημείο $x_0>\nu\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ώστε: $x_0\varepsilon\varphi x_0=-1$

3. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β).
   Αν είναι g(x)$\neq 0, x\in$[α, β] και g΄(x)$\neq 0, x\in(a,\beta)$ και f(β)g(α) – f (α)g(β) = 0,
   να δειχθεί ότι υπάρχει ξ $\in$ (α, β) : $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

4. Έστω f, g συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β) και $f(x)\neq 0, x\in[a,\beta]$.
   Αν είναι $g(a)-g(\beta)=\ln\dfrac{f(a)}{f(\beta)}$, να δειχθεί ότι υπάρχει ξ $\in$ (α, β) : $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=g'(\xi)$.

5. Έστω $f(x)=x^4+\mu^2x^3+(\mu^4+1)x^2+\mu^3$. Να δειχθεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό μ,
   η f(x) δεν μπορεί να έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες.

6. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 2] και $f''(x)\neq 0, \forall x\in$[1, 2]. Είναι ακόμη f (2) = 2f (1).
   ι) Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό ξ $\in$ (1,2) τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$
   ιι) Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ $\in$ (1,2) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ξ,f (ξ)) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

7. Δίνεται η $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{a-\beta}{2}x^2+\left(\dfrac{\beta}{2}+2\gamma\right)x+a^2$. Αν είναι 2 + 3 α +12 γ = 0, να δειχθεί ότι
   υπάρχει ξ $\in$ (0,1) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο (ξ, f (ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα των χ΄χ.

8. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^{1993}+x^{1991}+x=a^2(\beta-x)+\beta^2(\gamma-x)+\gamma^2(a-x)$
   έχει μοναδική ρίζα στο R.

9. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και $\gamma \in$ (α, β). Αν είναι f (α) = α >0 , f (β) = β και f (γ) = γ, τότε
   ι) Να δειχθεί ότι υπάρχουν κ, λ $\in$ (α, β) τέτοιοι ώστε να ισχύει: $f'(\kappa) = \dfrac{f(\kappa)}{\kappa}$ & $f'(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{\lambda}$
   ιι) Αν τα σημεία Α (κ, f (κ)), Β (λ, f (λ)), Ο (0,0) είναι συνευθειακά, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (α, β): f ΄΄(ξ) = 0.

10. Έστω f ,g συναρτήσεις με τις ιδιότητες:
   α) είναι συνεχείς στο [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α, β) με 0 < α < β
   β) f (x)g (x) $\neq 0, \forall x \in$ (α,β)
   γ) β f (α)g (α) – α f (β)g (β) = 0
   Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (α, β) : $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{1}{\xi}$.

11. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α, β] και f (x) $\neq$ 0.
   Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (α, β) : $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{1}{a-\xi} + \dfrac{1}{\beta-\xi}$

12. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και $\gamma \in$ (α, β). Αν είναι f (α) = α, f (β) = β και f (γ) = γ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (α,β) : f ΄΄(ξ) = 0.

13. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f (α) – f (β) = $\alpha^2 - \beta^2$.
   Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (α, β) : f ΄΄(ξ) = 2 ξ.

14. Έστω f συνεχής στο [– α, α], α > 0 και παραγωγίσιμη στο (– α, α).
   Αν είναι f (α) – f (– α) = 2 α^2, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (– α, α) : f ΄(ξ) +2 ξ = α.

15. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [-π/2, π/2]. Αν $f(x) \neq 0, \forall x \in$ [-π/2, π/2],
   να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in$ (-π/2, π/2) ώστε: $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \varepsilon\phi(\pi + \xi)$

16. Έστω φ,f συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:
   ι) είναι παραγωγίσιμες στο [α, β]
   ιι) f (α) = f (β) = 0
   ιιι) $f'(x)\phi(x) \neq f(x)\phi'(x), x \in [\alpha, \beta]$
   Να αποδειχθεί ότι:
   α) φ(α) φ(β) $\neq$ 0
   β) η συνάρτηση φ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

17. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β], με 0 < α < β.
   Αν α f (β) – β f (α) = 0, να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε η εφαπτομένη στο Μ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

18. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α. β).
   Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β), τέτοιος ώστε: $\begin{vmatrix} f(\beta) & f'(\xi) \\ g(\beta) & g'(\xi) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f'(\xi) & f(a) \\ g'(\xi) & g(a) \end{vmatrix} = 0$.

19. Έστω f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β).
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): $c \cdot f'(\xi) = \dfrac{1}{a-\xi} + \dfrac{1}{\beta-\xi}$ για κάθε σταθερά c.

20. Έστω f συνεχής στο [0, π] και παραγωγίσιμη στο (0, π).
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (0, π): f ΄(ξ) = σφξ.

21. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β), με f (α) = f (β) = 0. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με g (x) = f ΄(x) – c f (x), έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β), για κάθε σταθερά c.

22. Έστω συνάρτηση $f(x) = a \cdot x^4 + \beta \cdot x^3 + \gamma \cdot x^2 + x - 2, a \cdot \beta \neq 0$. Αν η συνάρτηση έχει τρία διαφορετικά τοπικά ακρότατα, να δειχθεί ότι $3\beta^2 > 8a\gamma$.

23. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 32x + 5, x \in R$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

24. Έστω συνάρτηση f με τις ιδιότητες:
ι) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β]
ιι) για κάθε x στο [α, β] ισχύει: $f(x)f'(x) \neq 0$
ιιι) f (α) f ΄(β) – f ΄(α) f (β) = 0
Να δειχθεί ότι:
α) Υπάρχει ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε: $\left(f'(\xi)\right)^2 = f(\xi)f''(\xi)$
β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$: $f(\xi_1)f''(\xi_1) + f(\xi_2)f''(\xi_2) > 0$.

25. Η f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β), με αf (β) = βf (α), όπου α, β μη μηδενικοί.
Να δειχθεί ότι:
α) Για τη συνάρτηση με τύπο $g(x) = \dfrac{f(a) - f(x) + f(\beta)}{a - x + \beta}$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο [α, β]
β) Υπάρχει ξ στο (α, β): $f'(\xi) = \dfrac{f(a) + f(\beta) - f(\xi)}{\xi - a - \beta}$

26. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β), με f (α) = β, f (β) = α.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): f ΄(ξ) = – 1 .

27. Έστω f συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1), με f (0) =1 και f (1) = 3.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (0,1): f ΄(ξ) = π ημ(πξ).

28. Έστω f, g συνεχείς στο [α, β], παραγωγίσιμες στο (α, β) και $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, \beta)$.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): $\dfrac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

29. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,3], με 2f (2) = f (1) + f (3).
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (1,3): f ΄΄(ξ) = 0.

30. Έστω f συνεχής στο [1,4], παραγωγίσιμη στο (1,4) και f ΄ γνήσια φθίνουσα στο (1,4).
Να συγκρίνετε τους αριθμούς f (2) + f (3) και f (1) + f (4).

31. Έστω f συνεχής στο [1, 3], παραγωγίσιμη στο (1, 3), με $f(1) = \dfrac{f(3)}{3} = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν σημεία α, β στο διάστημα (1, 3) με 1 < α < 2 < β < 3, τέτοια ώστε να ισχύει: f ΄(α) + f ΄(β) = 2.

32. Έστω f παραγωγίσιμη με f ΄(x) – 2 f (-x) = 0 για κάθε πραγματικό αριθμό.
ι) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$ είναι σταθερή στο R.
ιι) Αν f (0) = 4 να βρείτε τον τύπο της g.

33. Έστω g παραγωγίσιμη με $g'(e^x) = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$ και g (1) =1. Να υπολογισθεί το g (π).

34. Έστω f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε α, β > 0 ισχύει ότι f (α β) = α f (β) +β f (α). Να δειχθεί:
ι) f (1) = 0
ιι) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με f ΄(1) = 2002, να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε x > 0 ισχύει: $xf'(x) - f(x) = 2002x$
ιιι) Να προσδιορίσετε την f (x)

35. Έστω f : $R \to R$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:
A) $f(a+\beta) = f(a) + f(\beta) + 2\beta \cdot e^a - a\eta\mu\beta - 1, \forall a, \beta \in R$
B) $f'(0) = 1$
Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

36. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με f ΄ γνήσια φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
ι) Να δειχθεί ότι $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1), x \geq 1$.
ιι) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in R$ να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

37. Έστω f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(a) \neq f(\beta)$. Να δειχθεί ότι:
ι) Η εξίσωση $2f(x) = f(a) + f(\beta)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).
ιι) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ έτσι ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(\beta - a)}{f(\beta) - f(a)}$.

38. Έστω f συνεχής στο [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1) και f (1) = f (0) +c.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (0, 1): f ΄(ξ) = c.

39. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(a) = \beta^2, f(\beta) = a^2$. Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f, όπου η εφαπτομένη της να είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $(a-\beta)x - (a^2 - \beta^2)\psi + a = 0, |a| \neq |\beta|$.

40. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(a) = \beta^2, f(\beta) = a^2$.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): $\frac{1}{2}f'(\xi) = \xi - (a+\beta)$

41. Έστω f παραγωγίσιμη με f ΄ γνήσια αύξουσα στο R. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A$(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f διαφορετικό του A.

42. Έστω f, g συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:
A) f ΄(x) – g (x) = 0 και g ΄(x) – f (x) = 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.
B) f (0) =1 και g (0) =0
Γ) g (α) $\neq$ 0 για κάποιο α $\neq$ 0

Να δειχθεί ότι:

ι) Η συνάρτηση $F(x) = f^2(x) - g^2(x), x \in R$ είναι σταθερή
ιι) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ισχύει ότι $\kappa \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) = 0, \forall x \in R$, τότε να δειχθεί ότι κ = λ = 0.

43. Έστω f, g δύο φορές παραγωγίσιμες για τις οποίες ισχύει ότι $g''(x) = g(x) + e^x g'(x)$ και $f''(x) = f(x) - e^x f'(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $F(x) = f(x)g(x) - f'(x)g'(x)$ είναι σταθερή στο R.

44. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: f ΄΄(x) =0, x$\in R$ και f (0) =2000, f (1) =2001

45. Να βρείτε συνάρτηση g παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:
$g'(x) - g(x) = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x), x \in R$ & $g(0) = 1$

46. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (0, π), που ικανοποιεί τις σχέσεις:
α) $f(x) \neq 0, x \in R$, β) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, γ) $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)e^x\eta\mu x, x \in (0, \pi)$

47. Έστω g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x^2) = 2x^3, x > 0$ και g (1) =1. Να βρεθεί το g (16).

48. Έστω g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g(1) = \frac{\eta\mu e}{e}$ και $x \cdot g'(\ln x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$
Να βρεθεί το g (π).

49. Έστω f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(a \cdot \beta) = f(a) + f(\beta)$ με α, β > 0.
Να δειχθεί ότι:
ι) f (1) =0
ιι) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), x > 0$
ιιι) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x = e με f ΄(e) = 1/e, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και να βρείτε τον τύπο της.

50. Έστω f παραγωγίσιμη στο R, που ικανοποιεί τις συνθήκες:
f(0) = α και $f'(x) = a^2 f(x), a \neq 0, x \in R$.
Να δειχθεί ότι η G(x) = f (x) f (– x) είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της G.

51. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f (x) > 0 για κάθε x στο [α, β].
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): $f(a) = f(\beta) \cdot e^{(a-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

52. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη, με $[f(x) - f'(x)]^2 = 2f(x)f''(x), x \in \Re$ και f (0)=f ΄(0)=0.
Να δειχθεί ότι:
ι) Η $G(x) = \left([f(x)]^2 + [f'(x)]^2\right)e^{-x}$ είναι σταθερή στο R
ιι) Η f είναι σταθερή στο R.

53. Έστω f : $(0, +\infty) \to \Re$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:
Α) f (α β) = f (α) f (β), για κάθε α > 0, β > 0

Β) $f(x) \neq 0, x > 0$

Γ) f ΄(1)=2001

Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της και να βρείτε τον τύπο της.

54. Έστω συνάρτηση f με f (α +β) = f (α) + f (β) + α β , α, β πραγματικοί και f ΄(0) =2.
Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο τύπος της.

55. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β), με f (α) = β και f (β) = α.
Να δειχθεί ότι υπάρχουν σημεία u, v στο (α, β), ώστε: f ΄(u) + f ΄(v) + 2 = 0.

56. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], με f (x) > 0 για κάθε x στο [α, β].
Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_0, x_1, x_2 \in$(α, β), τέτοια ώστε: $\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)} + \dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)} = 2\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

57. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f(x-3\psi) = f(x) + ax\psi^2 - \beta x^2\psi^3, x, \psi \in \Re$.
Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

58. ι) Η f ΄ είναι συνεχής στο [α, β] και για κάποιο γ στο (α, β) ισχύει $\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} = \dfrac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a}$.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε f ΄΄(ξ) = 0.
ιι) Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει ότι $2f(x) = x \cdot (1 + f'(x)), x \in R$.
Να δειχθεί ότι η f ΄΄ είναι σταθερή στο R.

59. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α, β] και f ΄(x) $\neq$ 0 για κάθε x στο (α, β).
Να δειχθεί ότι υπάρχουν $\xi, \xi_1, \xi_2 \in$(α, β), έτσι ώστε: $2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$

60. Έστω $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ και g ΄(x) = f ΄(x) για κάθε x στο R. Αν g (4) = 11 να βρεθεί η g (x).

61. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο (0,2), με x f ΄(x) = f (x) + 2x (x + f (x)) και f (1) = 1.
Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}(x + f(x)), x \in (0,2)$ είναι σταθερή
και στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της f.

62. Έστω f παραγωγίσιμη στο [0,1] με f (0) = 0, f (1) = 1. Να δειχθεί ότι:
ι) υπάρχει ξ στο (0,1): f (ξ) = 1 – ξ
ιι) υπάρχουν α, β στο (0,1): f ΄(α) f ΄(β) = 1.

63. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β], με f (α) = f (β) = 0 και υπάρχει c στο (α, β)
τέτοιο ώστε f (c) > 0. Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): f ΄΄(ξ) < 0.

64. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β], με f (α) > 0 και f (β) = f ΄(β) = 0.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ στο (α, β): f ΄΄(ξ) > 0.

65. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$, με f (0) = 0 για την οποία ισχύουν:
f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και η f ΄ είναι γνήσια αύξουσα. Να δειχθεί ότι:
ι) f (x) = x f ΄(θ x), 0 < θ < 1

ιι) f (x) < x f ΄(x)

ιιι) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα.

66. Έστω f : [0,1] $\to \Re$ με συνεχή παράγωγο και f (x) > 0. Να δειχθεί ότι:
ι) υπάρχουν M, m τέτοια ώστε: $M \geq f'(x) \geq m$, για κάθε x στο [0,1]
ιι) αν επιπλέον ισχύει f (0) = 0, να δειχθεί ότι $f(x) \geq mx$

67. Αν ισχύουν x f ΄(x) = (x +1) f (x), x > 0, f (1) = e, τότε να βρεθεί ο τύπος της f.

68. Έστω f, g συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:
f ΄(x) = f (x) + g (x), g ΄(x) = g (x) – f (x) και f (0) = 0, g (0) = 1.
Να δειχθεί ότι:
ι) Η συνάρτηση $F(x)=\left[e^{-x}f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[e^{-x}g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2$ είναι σταθερή.
ιι) Να βρεθούν οι f (x) , g (x).

69. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α, β], με συνεχή παράγωγο στο [α, β]. Επίσης ισχύουν f (α) = f (β) = 0 και ότι η f αλλάζει πρόσημο στο [α, β].
Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g, με g (x) = f ΄(x) +2 f (x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α, β].
(<u>Υπόδειξη</u>: Ορίζουμε συνάρτηση $h(x)=e^{2x}f(x)$)

70. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και ισχύουν:
f ΄(α) = f ΄(β) = 0 και f ΄΄(x) $\geq 0, x \in$ [α, β]
Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο [α, β].

ΕΝΟΤΗΤΑ 8η:
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξεταστούν οι συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους:

   $i)\ f(x) = x^2\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) - x\,(\ln x - 2) + 2\,,\qquad ii)\ f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 4}$

2. Να εξεταστούν οι συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους:

   $i)\ f(x) = 2x\, e^{-x^2}\,,\qquad ii)\ f(x) = a^{\sqrt{1+x^2}},\ 0 < a < 1$

3. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

   $i)\ f(x) = |x^2 - 3x| + x\,,\qquad ii)\ f(x) = \begin{cases} e^x - e\,x, & x \leq 1 \\ x^2 \ln x\,, & x > 1 \end{cases}$

4. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη και γνήσια μονότονη στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$.
   Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει διάστημα (γ, δ) υποσύνολο του (α, β), τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\gamma, \delta)$ να ισχύει $f'(x) = 0$

5. α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο

   β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x + 1$ και $g(x) = e^{-x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο

6. Να αποδείξετε τις ανισοτικές σχέσεις:

   α) $\ln\frac{1+x}{1-x} \geq 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\,,\quad x \in [0,1)$

   β) $\eta\mu x \geq x - \frac{1}{6}\,x^3\,,\quad x \in R$

   γ) $2\ln(\eta\mu x) < \eta\mu^2 x\,,\quad x \in (0, \pi)$

7. Αν $f''(x) > 0\,,\ x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta)$

8. Έστω f συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Επιπλέον η f' είναι γνήσια φθίνουσα στο (α,β) και η $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\ \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}\,,\ x \in [\alpha, \beta]$

   Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}$

9. Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα [α,β]. Αν η f' είναι γνήσια αύξουσα στο (α,β), να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) < f(a)$

10. Να εξεταστούν οι συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους:

    α) $f(x) = e^{2x} - 4x + 3$

    β) $f(x) = a^{x^2-4x}\,,\quad 0 < a < 1$

    γ) $f(x) = (a^x + \beta^x)(a^{-x} + \beta^{-x}),\quad 1 < \alpha < \beta$

11. Έστω συνάρτηση f, με $f(x) + 3f(-x) = |x+2|$

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της

12. Έστω συνάρτηση f, με $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(1+x)}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης

β) Να αποδείξετε ότι: $(1+\beta)^{\ln\alpha} < (1+\alpha)^{\ln\beta}$, αν $1 < \alpha < \beta$

13. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$, με $f'(x) = 2ax + 2,\ x > 0,\ a > 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) > ax^2 + 2x + f(0),\ x > 0$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

14. α) Να αποδείξετε ότι: $x\ln x + 1 > x$, $x > 1$

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

γ) Να βρείτε τον $k \in R$, ώστε $(k+1)^2\ \ln(k^2+5) = (k^2+4)\ \ln(k^2+2k+2)$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο R, με $f'(x) > g'(x),\ x \in R$.

Αν υπάρχει $a \in R$, ώστε $f(a) = g(a)$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in (a,+\infty)$

β) $f(x) < g(x)$, για κάθε $x \in (-\infty,a)$

16. Έστω συνάρτηση f, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $f(a) = f(\beta) = 0$

Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,\beta)$

17. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$, με $f(0) = 1$ και $f'(x) > f(x),\ x \geq 0$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(x)\,e^{-x}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > e^x,\ x > 0$

γ) Αν $f(1) = 2e$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f'(\xi) < e + f(\xi)$

18. Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν $f''(x) > 0$ και $f'(a) > 0$, να αποδείξετε ότι $f(a) < f(\beta)$

19. α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{x^\nu}$, $x > 0,\ \nu \in N^*$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $e^x \geq \left(\frac{x\,e}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in N^*$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$ και $x_0 > 0$ θέση τοπικού ακρότατου της συνάρτησης.

Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ διέρχονται τρεις εφαπτόμενες της C_f

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2-4}{3}\,x + \frac{\lambda^3-4\lambda-81}{27}$, $\lambda \in R$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση έχει δύο διαφορετικά τοπικά ακρότατα για κάθε $\lambda \in R$

β) Αν $O(0,0)$, $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ είναι ανεξάρτητο από το λ

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει δύο τοπικά ακρότατα

β) Αν η συνάρτηση έχει στο σημείο ξ τοπικό ακρότατο, τότε $\frac{1}{\xi-\rho_1} + \frac{1}{\xi-\rho_2} + \frac{1}{\xi-\rho_3} = 0$

23. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$i)\ f(x) = x^4 \ln x + 1$, $ii)\ f(x) = \frac{1+x\ln x}{1+x}$, $iii)\ f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

$iv)\ f(x) = x^x$, $v)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$, $vi)\ f(x) = a^{x-\sqrt{x}}$, $0 < a \neq 1$

$vii)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $viii)\ f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$, $ix)\ f(x) = x^2 - 3|x| + 2$

$x)\ f(x) = \begin{cases} e^x - ex, & x \leq 1 \\ x\ln x, & x > 1 \end{cases}$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (3-a)x - (a+5)$, $a \in R$

Να βρείτε για ποια τιμή του α, το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της f είναι ελάχιστο

25. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \cdots + (x-\nu)^2,\ \nu \in N^*,\ x \in R$$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + \lambda$, $\lambda \in R$ και τα x_1, x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ είναι ανεξάρτητη του λ

27. Αν $x + \psi = 13$, $x > 0$, $\psi > 0$ να βρείτε το μέγιστο της παράστασης: $A = 3\sqrt{x} + 2\sqrt{\psi}$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^\lambda - \lambda x$, $x \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$

β) $x^\lambda - \lambda x \leq 1 - \lambda$, $x \geq 0$

γ) $\alpha^\lambda \beta^\mu \leq \lambda\alpha + \mu\beta$, αν $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

29. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ θετικοί αριθμοί, με $\alpha_1^x + a_2^x + \cdots + a_\nu^x \geq \nu$, $\nu \in N^*$, $x \in R$,

να αποδείξετε ότι: $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = 1$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2}{x}$, $x > 0$, $a \neq 0$ και το σημείο της Μ(x,ψ). Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες, οι οποίες τέμνουν την ευθεία ψ = 2 – x στα σημεία Α και Β

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΒ

β) Να βρείτε σημείο Ρ της C_f, που η απόστασή του από την ευθεία ψ = – x να είναι ελάχιστη

31. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2}{x}$, $x > 0$, $a \neq 0$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, της οποίας το τμήμα που βρίσκεται μεταξύ των Ox, Oψ να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος

32. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\alpha x^2 + \beta)$, $\alpha \neq 0$

Να βρείτε τα α, β ώστε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης να είναι διάστημα Δ πλάτους 2 και η συνάρτηση να έχει τοπικό ακρότατο ίσο με 1.

33. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu, \mu \in N^*$, $\nu \geq 2$, $\mu \geq 2$ η $f(x) = x^{\mu}(x-2)^{\nu}$ έχει ένα τουλάχιστον τοπικό ελάχιστο

34. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + \lambda$, $\lambda \in R$ και τα x_1, x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $5x - 12\psi + 2 = 0$

35. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$.

Αν τα $x_1, x_2 \in R$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$ (1)

β) Ποιο είναι το συμπέρασμα που προκύπτει από την (1), όσον αφορά στα τοπικά ακρότατα της f;

36. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και έχει στα $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$ τοπικό μέγιστο. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε η συνάρτηση να έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο

37. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία της

β) Να αποδείξετε ότι $x^x \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, $x > 0$

38. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f, με $f(x) + 2f(-x) = 2e^x + e^{-x} - x$, $x \in R$

39. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x+a}$, $a \in R$

Να βρείτε το α, έτσι ώστε η τιμή για την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, να είναι διπλάσια από την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

40. Έστω $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \leq \eta\mu x + 2\eta\mu 2x \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 5$

41. α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1$, $x \in R$

β) Έστω $f(x) = (e^x - x)\ln(e^x - x) - (e^x - x)$

i) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

ii) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της

42. α) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$, $a > 0$ είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα (0, α)

43. α) Αν αληθεύει η σχέση $e^x \geq 1 + ax$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι α = 1

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 3$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης

β) Αν 0 < α < β < $\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$

45. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$i)$ $e^x + e^{5x} = 2$, $ii)$ $x^2 + x + \ln x = 2$, $iii)$ $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες, πραγματικές και άνισες

47. α) Αν $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο

β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + 2x$ και $g(x) = e^{-x} - x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο βρίσκεται στον άξονα ψ΄ψ

48. α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$

β) Να αποδείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$, $x > 0$

49. α) Να αποδείξετε ότι $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει μοναδική ρίζα την x = 0

50. α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\frac{\beta}{x}\right) - 1 + \frac{\beta}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$

β) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{e\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} < e^{\beta}$

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 6a^2x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in R$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \neq 0$ η συνάρτηση δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές θέσεις τοπικών ακρότατων

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$, $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha + 1)^{\alpha}$, για $a > e$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει: $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $x_1 = 2,\ x_2 = 4$

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\mu x}$, $\mu > 0$

Να βρείτε για ποια τιμή του μ, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης, είναι η ελάχιστη δυνατή

54. Έστω f παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = x^3 + 4x^2 + 11x$
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα

55. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g , στο διάστημα $[0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει:
$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$, $x \geq 0$
Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$, $x \geq 0$

56. Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu x < 2x$, $x > 0$ β) $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$

57. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + me^{-x})$, $m > 0$
α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $A(x_0, f(x_0))$

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$ και έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$. Επιπλέον θ είναι η γωνία που σχηματίζει η (ε) με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της εφθ, όταν το α μεταβάλλεται.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}$
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in R$, οι αριθμοί $f(x_0) - 1$ και $f(-x_0) - 1$ είναι αντίστροφοι και θετικοί
β) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της
γ) Αν $g(x) = \ln f(x)$, να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη

60. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(1) = 0$ και $f''(x) < 0$.
Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία της

61. Αν $f'(x) > 2x + 3$ με $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει: $f(x) > x^2 + 3x + 1$

62. Έστω $f''(x) > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $f(a) = f(\beta) = 0$
Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

63. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:
$f(2) = \kappa + g(2)$ και $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $x \geq 0$
Να αποδείξετε ότι:
α) $f(x) > g(x) + \kappa$, αν $x < 2$ και β) $f(x) < g(x) + \kappa$, αν $x > 2$

64. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(x) = -x^2 + 3$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ και Ρ ένα σημείο της C_f.
Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΟΑΡΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α, Β σημεία στους άξονες. Να βρείτε τη θέση του Ρ, έτσι ώστε το εμβαδόν του ΟΑΡΒ να είναι μέγιστο

65. Για τη συνάρτηση f, ισχύει $f(x)=-\frac{f'(x)}{2}$, $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)e^{2x}$ είναι σταθερή

β) Αν $f(0)=2012$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα

66. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη, έτσι ώστε $e^{f(x)}+\ln(f(x))=e^{x^3+x}+2^x$, με $f(x)>0$

Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

67. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2000)^{2000}=x^{2000}-2000^{2000}$ έχει μία μόνο λύση

68. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,6]. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(0,1) και ισχύει ότι $f'(x)>x$, $x\in[0,6]$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ είναι γνήσια αύξουσα στο [0,6]

β) $g(x)>0$, $x\in[0,6]$

γ) Το σημείο B(6,18) δεν ανήκει στη C_f

69. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις δεν τέμνονται

β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την $\psi=x$, καθώς και το συγκεκριμένο σημείο

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+(x-1000)^2$, $x\in R$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: 1000^2 και 998^2+2^2

71. Δίνεται συνάρτηση f, με $f'(x)<\left(\frac{x^2}{2}\right)'$ για κάθε $x\in R$

Να αποδείξετε ότι $f(4)-f(2)<6$

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}+a$, $x>0$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=0$

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(2\lambda^2+2)-\frac{1}{\lambda^2+3}>\ln(\lambda^2+3)-\frac{1}{2\lambda^2+2}$

73. Να αποδείξετε ότι $e^x>1+\ln(1+x)$, $x>0$

74. α) Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο [α, β], με $f'(a) < 0 < f'(\beta)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = 0$

β) **(Θεώρημα Darboux):** Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο [α, β], με $f'(a) \neq f'(\beta)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε κ μεταξύ των $f'(a)$ και $f'(\beta)$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = \kappa$

γ) Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο [α, β] και υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$,

τέτοια ώστε $f(x_1) < f(\alpha) < f(\beta) < f(x_2)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

75. Δίνεται η συνάρτηση f, με $|f''(x)| \leq M$, για κάθε $x \in [0, a]$

Αν η f δέχεται τη μεγαλύτερη τιμή της σε ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος,

να αποδείξετε ότι $|f'(0)| + |f'(a)| \leq a \cdot M$

76. A) Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, με $2f(x) \geq f(a) + f(\beta)$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = 0$

β) υπάρχει $x_0 \in R$, ώστε $f''(x_0) = 0$

B) Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, με $3f(x) \geq f(1) + 2f(2)$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f δεν είναι $''1-1''$

β) υπάρχει $\xi \in R$, ώστε $f'''(\xi) = 0$

ΕΝΟΤΗΤΑ 9η:
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x|$
   Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα, κυρτά και τα σημεία καμπής της
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$
   Να βρεθούν τα α, β, γ ώστε η f να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής το Κ(2, – 2)
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + x - 1$
   Να βρεθεί το a, έτσι ώστε η f να είναι κυρτή στο R
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + 12x + \beta$
   α) Να βρεθεί το a, έτσι ώστε η f να έχει ένα σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.
   Έχει στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση τοπικό ακρότατο;
   β) Να βρεθεί το β, έτσι ώστε το σημείο καμπής να βρίσκεται στον άξονα x΄x
5. Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και κυρτές στο R. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, να αποδείξετε ότι η fog είναι κυρτή στο R
6. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^{(3)}(x) > 0$.
   Αν $f''(0) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε η f να είναι κοίλη στο διάστημα (– δ ,0] και κυρτή στο [0,δ)
7. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ
   α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1 \neq x_2$ ισχύει:
   $$f(x_1) + f(x_2) > 2\,f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$ (Ανισότητες Jensen)
   β) Αν η f είναι κοίλη, τότε ισχύει: $f(x_1) + f(x_2) < 2\,f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
   γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \neq 0,\ \nu \in N^*$ ισχύει: $(e^{a} + 2)^{\nu} + (e^{-a} + 2)^{\nu} > 2 \cdot 3^{\nu}$
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\lambda e^x - x^2$, $\lambda > 0$
   α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει ένα μόνο σημείο καμπής, για κάθε λ > 0
   β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής
9. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις, ως προς τα κοίλα, τα κυρτά και τα σημεία καμπής τους:
   $i)\ f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x,\quad x \in [0,2\pi]$, $ii)\ f(x) = x\ln x + \sqrt{x}$, $iii)\ f(x) = xe^x + x + 1$
10. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2a}{3}x^3 + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^2 + 7)x - 5a^2$
    δεν έχει σημεία καμπής για κάθε $\alpha \in R$
11. Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = x\,\eta\mu x$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $\psi^2(4 + x^2) = 4x^2$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \ \ \alpha \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μόνο σημείο καμπής $A(x_0, f(x_0))$

β) Αν η f έχει δύο τοπικά ακρότατα και x_1, x_2 είναι οι θέσεις αυτών,

να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2x_0$

γ) Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα την x_3, να αποδείξετε ότι $x_3 = x_0$

13. Α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και $f''(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και προς τα πάνω στο διάστημα $[0, +\infty)$

Β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και ισχύουν οι σχέσεις $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, να αποδείξετε ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής

14. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f'' συνεχή. Το x_1 είναι θέση τοπικού μέγιστου, το x_2 είναι θέση τοπικού ελάχιστου και $f'(x) \neq 0, \ \ x \in (x_1, x_2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\eta\mu x$

α) Να βρεθούν οι ρίζες της f' και η μονοτονία της f

β) Αν $f'(\rho) = 0$, τότε ισχύει ότι $f''(\rho) = 0$

γ) Να ελέγξετε αν στο $x_0 = \rho$ η συνάρτηση έχει ακρότατο ή αν το x_0 είναι θέση σημείου καμπής

16. Αν $f''(x) > 0$ σε ένα διάστημα Δ, $g'(x) > 0$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in f(\Delta)$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof είναι κυρτή στο Δ

17. Έστω $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η C_f έχει ένα το πολύ σημείο καμπής

β) Δεν υπάρχει ευθεία η οποία να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία της C_f

18. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με

$$f'(x)\left[\left(f'(x)\right)^2 + 2\right] = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5\,, \ \ x \in R$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία καμπής

19. Έστω $f''(x) + f'(x) = 2e^x$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

α) Να βρεθεί ο τύπος της f

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να μελετηθεί η καμπυλότητα της f

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 + \alpha x + \beta, \ \ \alpha, \beta \in R$, για την οποία ισχύει $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x \in R$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της C_f και το σημείο $M(1, f(1))$, σχηματίζουν τρίγωνο με σταθερό εμβαδό

21. Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $\psi^2 = \frac{4}{4 + x^4}$

22. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = x \cdot \eta\mu(\ln x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

23. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

$i)\ f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $\qquad ii)\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

24. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{2x^2+1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\beta x^2 + 12}{x + \alpha}$, $\alpha, \beta \in R$

Να βρείτε τα α, β, έτσι ώστε η C_f να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$ και η ευθεία με εξίσωση $x = -2$ να είναι ασύμπτωτη της C_f

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x - 2}$, $\alpha, \beta \in R$

Να βρείτε τα α, β, έτσι ώστε η C_f να μην έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

27. Να βρείτε τα α, β, έτσι ώστε $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x + \alpha x\, \sigma\upsilon\nu x + \beta\, \eta\mu x}{x^3} = 1$

28. Δίνεται συνάρτηση f, για την οποία υπάρχει η f'' και είναι συνεχής στο R

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$, $x \in R$

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = xa^x \ln a + 1 - a^x$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{a^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ \ln a, & x = 0 \end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της g και να βρείτε το πρόσημο της g(x) για κάθε $x \in R$

β) Να βρεθεί η f'

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

30. α) Να αποδείξετε ότι $x \ln x + 1 > x$, $x > 1$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$

i) να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα για κάθε x > 1

ii) να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty}(xf(x))$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - x)$

iii) να βρεθεί το $\lambda \in R$, έτσι ώστε:

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 5) \cdot \ln(\lambda^2 + \lambda + 2) = (\lambda^2 + \lambda + 1) \cdot \ln(\lambda^2 + 3\lambda + 6)$$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^x + \beta^x, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha x) + \sigma\upsilon\nu(\beta x), & x > 0 \end{cases}$, $\alpha > 0,\ \beta > 0$

Να βρεθούν τα α, β έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A\left(-1, \frac{5}{2}\right)$

32. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1,1) \to R$

Αν υπάρχει η $f''(0)$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$

33. Δίνεται συνάρτηση f, τρείς φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{xf^{(3)}(x)} = 1$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$

34. Δίνεται συνάρτηση f, με f'' συνεχή στο $x_0 = 1$ και $f'(1) = 0$, $\frac{f''(1)}{f(1)} = \pi$, $f(1) \neq 0$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} + f'(x)}{f(x)\,\eta\mu\pi x - f'(x)}$

35. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)}\right) = -\frac{f''(a)}{2(f'(a))^2}$$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)e^x - (x+1)e^{-x}$, $x \in R$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

β) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x^2}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο R

37. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο [0, 1], με $f(0) = 0$ και $f'(x) > a$, $x \in [0,1]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ισχύει $2f(x) > a$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln(x^2+1)$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης

β) Να ελέγξετε αν υπάρχουν σημεία καμπής

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{3x}+1)$

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

40. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2}\right), \qquad ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

41. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή. Να αποδείξετε ότι μεταξύ ενός τοπικού ελάχιστου και ενός τοπικού μέγιστου, τα οποία είναι διαδοχικά, η C_f έχει σημείο καμπής

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\,\eta\mu(\ln x)$, $x > 0$

    Να βρεθούν τα σημεία καμπής

43. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο διάστημα $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

    με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$

    Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\eta\mu x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

44. Η ευθεία $\psi = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

    Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ, ώστε $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}\, f(x) + 2\mu\, x^2 + 3}{x^2 f(x) - x^3 + \sqrt{x^4+1}} = 4$

45. Η ευθεία $\psi = 2\,x + 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

    Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x\left(\sqrt{f(x)} - 2\sqrt{x}\right)}$

46. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και στο εσωτερικό του $x_0 \in \Delta$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Να αποδείξετε ότι το x_0 δεν είναι θέση σημείου καμπής

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2+2}{x-\alpha}$, $\alpha \neq 0$

    α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

    β) Αν Μ είναι το σημείο τομής τους, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\alpha}{e^x}$, $\alpha \neq 0$

    α) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει για κάθε τιμή του α μία πλάγια ασύμπτωτη

    β) Αν α < 0, να αποδείξετε ότι η C_f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_0

    γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x_0, f(x_0))$

49. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 - (\alpha+\beta)x - 2\alpha}{x^2 - \alpha x + 3}$, να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$ και $\psi = \beta x + \alpha + \gamma + 2$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in R$

    Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της C_f και το σημείο $M(1, f(1))$, σχηματίζουν τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$

    α) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

    β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

52. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες, με συνεχή παράγωγο στο $x_0 = 1$

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(fog)(x) - x\,(fog)(1)}{x-1} = f'\big(g(1)\big)g'(1) - f(g(1))$

53. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, όταν ισχύει η σχέση $\frac{2x\,f(x) + x^2 f'(x)}{e^x} = 1$

54. Δίνεται συνάρτηση f, η οποία είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$, με $f(0) = 0$

Να αποδείξετε ότι $2f(x) > 3f\left(\frac{2x}{3}\right)$, $x > 0$

55. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

56. Να μελετήσετε και να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$i)\ f(x) = x^3 - 3x$, $ii)\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $iii)\ f(x) = x \ln x$, $iv)\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$v)\ f(x) = x - \eta\mu x$, $vi)\ f(x) = \ln|\ln x|$, $vii)\ f(x) = \frac{x}{e^x}$

$$viii)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & x < -1 \\ x^2 - 1, & -1 \le x \le 1 \\ 2\ln x, & x > 1 \end{cases}$$

57. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = ax^2 - 3x + 2 + \beta \ln x$, $a, \beta \in R$

α) Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε το σημείο Μ(1,5) να είναι σημείο καμπής της f

β) Για τις τιμές των α, β που θα βρείτε, να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα

ΕΝΟΤΗΤΑ 10η:
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η Άλγεβρα της Α΄ και Β΄ Λυκείου μας έχει εφοδιάσει με τις απαραίτητες γνώσεις για να επιλύουμε βασικές μορφές εξισώσεων στα Μαθηματικά.

Η παρούσα ενότητα έχει ως στόχο να ενσωματώσει τις διαφορετικές μορφές εξισώσεων, όπως αυτές μπορούν να επιλυθούν, με τη βοήθεια της Ανάλυσης.

Να τονίσουμε εδώ ότι η Ανάλυση ακολουθεί ως φυσική συνέπεια, για τις εξισώσεις εκείνες που δε μπορούμε να λύσουμε με τη βοήθεια των έως τώρα γνώσεών μας.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει :
« μία ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ λύση » (ή δύο, τρεις,…τουλάχιστον λύσεις)

$1^{η}$ Περίπτωση

Χρήσιμο είναι να ελέγξουμε την πιθανότητα ύπαρξης μιας προφανούς λύσης. Δηλαδή να ανακαλύψουμε - μαντέψουμε έναν αριθμό ο οποίος επαληθεύει την εξίσωση. Όπως είναι λογικό η ανακάλυψη του αριθμού πρέπει να γίνεται πολύ εύκολα.

Παραδείγματα:
Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση:

1) $e^x + e^{5x} = 2$. Μία προφανής λύση στο R είναι η $x_0 = 0$.

2) $x^2 + x + \ln x = 2$, $x \in (0, +\infty)$. Μία προφανής λύση είναι η $x_0 = 1$

3) $x \ln x - x + 1 = \int_1^x f(t)dt$, $x > 0$, f συνεχής συνάρτηση. Μία προφανής λύση είναι η $x_0 = 1$

2η Περίπτωση

Αποτελεί μία από τις βασικότερες εφαρμογές του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO. Υπενθυμίζεται ότι υπάρχουν αρκετές μορφές παρόμοιων ασκήσεων (βλ. Κεφάλαιο: Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων).

Παραδείγματα:

1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x = \alpha$, $\alpha \neq 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (–1, 1), ομόσημη του α.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f $με$ $f(x) = \alpha x^2 + 2x - \alpha,\ x \in \mathbb{R}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $\alpha < 0$ $και$ $\alpha > 0$.

Αν $\alpha < 0$ τότε:

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ ως πολυωνυμική, με

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -\alpha \\ f(-1) &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(-1) = 2\alpha < 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$f(\xi_1) = 0 \Rightarrow \alpha\xi_1^2 + 2\xi_1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\xi_1^2 + 2\xi_1 = \alpha$.

Δηλαδή ο αριθμός ξ_1 είναι ρίζα της εξίσωσης, ομόσημη του α.

Ανάλογα εργαζόμαστε στην περίπτωση κατά την οποία $\alpha > 0$.

2) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

<u>Λύση</u>

Ως γνωστόν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης: $f(x) = g(x)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad h(x) = x - \sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της ως διαφορά δύο συνεχών συναρτήσεων, με

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= -1 \\ h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} < 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $h(\xi) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση, άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

<u>3η Περίπτωση</u>

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα, με τη βοήθεια του ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ των συναρτήσεων (βλ. Κεφάλαιο: Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων).
Η περίπτωση που εξετάζουμε είναι χρήσιμη, όταν δεν έχουμε τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του BOLZANO.

<u>Παραδείγματα:</u>

1) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, με $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{2x_0 - 1} + \ln x_0 = 1$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + e^{2x-1} + \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

- Η συνάρτηση είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- Η συνάρτηση είναι παντού γνησίως αύξουσα , διότι:

  Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ $\mu\varepsilon$ $x_1 < x_2$, τότε:

  επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα ,έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$ (1),

  επίσης $2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \xrightarrow{e^x \nearrow} e^{2x_1 - 1} < e^{2x_2 - 1}$ (2),

  επειδή η $\ln x$ *είναι* $\nearrow$, *έχουμε ότι*: $\ln x_1 < \ln x_2$ (3)

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3), καθώς επίσης και το -1 στα δύο μέλη της προκύπτουσας σχέσης, έχουμε ότι: $g(x_1) < g(x_2)$

- Επιπλέον $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \alpha + \frac{1}{e} + (-\infty) - 1 = -\infty$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \beta + (+\infty) + (+\infty) - 1 = +\infty$.

Επομένως το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της συνάρτησης g, είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Επειδή ο αριθμός 0 (μηδέν) ανήκει στο σύνολο τιμών της g, πρέπει να υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, +\infty) : g(x_0) = 0$

Δηλαδή υπάρχει $x_0 > 0$: $f(x_0) + e^{2x_0 - 1} + \ln x_0 = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Τη μονοτονία μιας συνάρτησης την ελέγχουμε συνήθως με τη βοήθεια της παραγώγου της. Στο παρόν παράδειγμα όμως, δεν έχουμε τη δυνατότητα να γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f και κατ' επέκταση και η g είναι παραγωγίσιμες, επομένως χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό.

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + 2x - 9 = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 9$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική (1),
με παράγωγο $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα (2)
Επίσης έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^5) = -\infty$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^5) = +\infty$ (3).

Έτσι καταλήγουμε ότι το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της f είναι όλο το R. Το 0 (μηδέν) ανήκει στο σύνολο τιμών της f, επομένως υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^5 + 2x_0 - 9 = 0$,
δηλαδή η αρχική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα (επειδή ο τρόπος εργασίας είναι πανομοιότυπος), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

" Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα."

4η Περίπτωση

Όταν δε μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις, δοκιμάζουμε να εφαρμόσουμε το ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE για μία συνάρτηση F για την οποία ισχύει ότι:

$F'(x) = f(x)$ *(μία παράγουσα – αρχική συνάρτηση της f)*

Παραδείγματα:

1) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *και* $\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x + \gamma = 0$ (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0 ,1).

Λύση

Αν θεωρήσουμε συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x + \gamma,\ x \in [0,1]$, παρατηρούμε ότι δεν έχουμε τη δυνατότητα να ελέγξουμε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(1)$.
Έτσι βρίσκουμε μία “αρχική” συνάρτηση της f.
Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση F , με $F(x) = \frac{\alpha}{5}x^5 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x$, $x \in [0,1]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R, με $F'(x) = f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$. Για την F ισχύουν:

- Η F είναι συνεχής στο διάστημα [0 ,1] ως πολυωνυμική
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο (0,1)
- $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$, *δηλαδή* $F(0) = F(1)$

Έτσι, βάσει του Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$: $F'(\xi) = 0 \Rightarrow \alpha\xi^4 + \beta\xi + \gamma = 0$.
Δηλαδή η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ στο διάστημα (0 ,1).

2) Δίνονται συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα [α ,β] και παραγωγίσιμες στο (α, β).
Επιπλέον ισχύει $f(x) > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ *και* $\ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = g(\beta) - g(\alpha)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0$

Λύση

Επειδή είναι δύσκολο να βρούμε μία αρχική συνάρτηση, επεξεργαζόμαστε το συμπέρασμα.
Έχουμε λοιπόν

$$f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + g'(\xi) = 0$$

Θεωρούμε έτσι τη συνάρτηση h *με* $h(x) = \ln(f(x)) + g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ η οποία

- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)$
- είναι συνεχής στο [α, β] , επειδή είναι και οι f, g

$$\left.\begin{array}{l} h(\alpha)=\ln\left(f(\alpha)\right)+g(\alpha) \\ h(\beta)=\ln\left(f(\beta)\right)+g(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow h(\alpha)=h(\beta) \quad \textit{διότι}:$$

- $\ln\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=g(\beta)-g(\alpha) \Leftrightarrow \ln\left(f(\alpha)\right)-\ln\left(f(\beta)\right)=g(\beta)-g(\alpha) \Leftrightarrow$

  $\ln\left(f(\alpha)\right)+g(\alpha)=\ln\left(f(\beta)\right)+g(\beta).$

Επομένως βάσει του Θ. Rolle, υπάρχει ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$: $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \cdots f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0.$

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει:
“ μία ΤΟ ΠΟΛΥ λύση ” (ή δύο, τρεις,… το πολύ λύσεις)

1η Περίπτωση

Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα με τη βοήθεια του Θ. Rolle , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της « απαγωγής σε άτοπο »

Παραδείγματα:

1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1) δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα (0 ,1).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=x^3-3x+\lambda$

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(0,1)$ *με* $\rho_1<\rho_2$.

Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2), με $f'(x)=3x^2-3$
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ (από την υπόθεση)

Επομένως βάσει του Θ. Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subset(0,1)$: $f'(\xi)=0$

Δηλαδή $3\xi^2-3=0 \Leftrightarrow \xi=\pm1$ ΑΤΟΠΟ, διότι $\xi\in(0,1)$.

Έτσι η εξίσωση (1) έχει μία το πολύ ρίζα στο διάστημα (0 ,1).

2) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f''(x)\neq 0$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι οι συναρτήσεις f *και* f' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$. Τότε θα υπάρχουν $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbb{R}$ *με* $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ *τέτοιοι ώστε* $f\left(\rho_1\right)=f\left(\rho_2\right)=f\left(\rho_3\right)=0.$

Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\rho_1,\rho_2\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\rho_1,\rho_2\right)$
- $f\left(\rho_1\right)=f\left(\rho_2\right)=0$

Επομένως βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$: $f'\left(\xi_1\right)=0$ (1)

Για τη συνάρτηση f επίσης ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\rho_2,\rho_3\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\rho_2,\rho_3\right)$
- $f\left(\rho_2\right)=f\left(\rho_3\right)=0$

Επομένως βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\xi_2\in\left(\rho_2,\rho_3\right)$: $f'\left(\xi_2\right)=0$ (2)

Για τη συνάρτηση f ΄ ισχύουν:

- Η f ΄ είναι συνεχής στο $\left[\xi_1,\xi_2\right]$
- Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\xi_1,\xi_2\right)$
- $f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)=0$ (από σχέσεις (1) & (2))

Επομένως βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\rho\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$: $f''\left(\rho\right)=0$,

το οποίο είναι άτοπο διότι $f''\left(x\right)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'\left(x\right)=0$ υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$.

<u>Λύση</u>

Έστω α , β (α < β) δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης f ΄(x) = 0.

Τότε f ΄(x) $\neq 0$ για κάθε $x\in\left(\alpha,\beta\right)$.

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, έπεται ότι θα είναι και συνεχής στο R.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (α , β).

Τότε θα υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in\left(\alpha,\beta\right)$ *με* $\rho_1<\rho_2$: $f\left(\rho_1\right)=f\left(\rho_2\right)=0$ (1)

Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\rho_1, \rho_2\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\rho_1, \rho_2\right)$
- $f\left(\rho_1\right) = f\left(\rho_2\right)$, από τη σχέση (1)

Επομένως βάσει του Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\rho_1, \rho_2\right) \subset \left(\alpha, \beta\right): \quad f'\left(\xi\right) = 0$,
το οποίο όμως είναι άτοπο, επειδή $f'\left(x\right) \neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left(\alpha, \beta\right)$.
Άρα η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (α , β).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο αριθμός των ριζών πού ***το πολύ*** έχει μία συνάρτηση f, εξαρτάται σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα από το πλήθος των ριζών της παραγώγου της f ΄.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f'\left(x\right) > 0 \ \left(\acute{\eta} \ \ f'(x) < 0\right) \ \text{για κάθε} \ \ \chi \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, έπεται ότι είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες. Τότε θα υπάρχουν
$\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \rho_1 < \rho_2 \quad \text{τέτοιοι ώστε} \quad f\left(\rho_1\right) = f\left(\rho_2\right) = 0 \quad (1)$
Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\rho_1, \rho_2\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\rho_1, \rho_2\right)$
- $f\left(\rho_1\right) = f\left(\rho_2\right)$, από τη σχέση (1)

Επομένως βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in \left(\rho_1, \rho_2\right): \quad f'\left(\xi\right) = 0$,
το οποίο είναι άτοπο επειδή $f'\left(x\right) > 0 \ \left(\acute{\eta} \ \ f'\left(x\right) < 0\right) \ \text{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}$.
Άρα η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το προηγούμενο παράδειγμα μας εξασφαλίζει ότι αν μία συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα, τότε εκεί έχει μία το πολύ ρίζα
Επομένως σύμφωνα με τα δύο τελευταία παραδείγματα, όταν θέλουμε να γνωρίζουμε πόσες ***το πολύ*** ρίζες έχει μία συνάρτηση, βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της παραγώγου της.

2η Περίπτωση

Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση ***" 1 – 1 "****.*
Έτσι η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία το πολύ ρίζα.

Παραδείγματα:

1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \ln x = 1$ έχει μία το πολύ ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f $με$ $f(x) = x \cdot \ln x - 1$, $x \in [1, e]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με
$f'(x) = \ln x + 1$ $για$ $κάθε$ $x \in (1, e)$.
Επειδή για κάθε $x \in (1, e)$ $ισχύει$ $f'(x) > 0$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (1,e),
οπότε η f είναι " 1 – 1 " στο (1,e).
Επομένως η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία το πολύ ρίζα.

2) ι) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο διάστημα Δ και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
ιι) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + x + 1$ $και$ $g(x) = e^{-x}$ έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.

Λύση

ι) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και η g γνησίως φθίνουσα στο Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ $με$ $x_1 < x_2$ $ισχύει$ $ότι$ $f(x_1) < f(x_2)$ $και$ $g(x_1) > g(x_2)$,
άρα $f(x_1) < f(x_2)$ $και$ $-g(x_1) < -g(x_2)$
δηλαδή $f(x_1) - g(x_1) < f(x_2) - g(x_2)$ $επομένως$ $h(x_1) < h(x_2)$
Έτσι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα Δ, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

ιι) Επειδή $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ $και$ $g'(x) = -e^{-x} < 0$, $x \in \mathbb{R}$, συνάγουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ η g είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Ο έλεγχος της μονοτονίας μιας συνάρτησης, στην περίπτωση που δε γνωρίζουμε αν είναι παραγωγίσιμη, γίνεται πάντοτε με τον ορισμό.

Γ΄ ΜΕΡΟΣ

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση έχει:
« μία ΑΚΡΙΒΩΣ λύση » (ή δύο, τρεις ,…ακριβώς λύσεις)

Είναι προφανές ότι οι διάφορες περιπτώσεις, είναι όσοι οι δυνατοί συνδυασμοί των περιπτώσεων του Α΄ και του Β΄ ΜΕΡΟΥΣ.

Παραδείγματα

1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-1}+x-2=0$ (Ε), έχει μία ακριβώς ρίζα.

Λύση

Καταρχάς είναι προφανές ότι ο αριθμός 1 είναι μία ρίζα της εξίσωσης, επειδή την επαληθεύει.
Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x)=e^{x-1}+x-2$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x-1}+1>0 \quad για \;\; κάθε \;\; x\in\mathbb{R}$. Έτσι η συνάρτηση είναι πάντα γνησίως αύξουσα, επομένως η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.
Επομένως συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (Ε) έχει μοναδική λύση τον αριθμό 1.

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^5+3x^3+21x-47=0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

Λύση

Όπως έχουμε αποδείξει κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=2x^5+3x^3+21x-47$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=10x^4+9x^2+21>0 \quad για \;\; κάθε \;\; x\in\mathbb{R}$.
Άρα η συνάρτηση είναι παντού γνησίως αύξουσα, δηλαδή η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ μία λύση.
Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει μία μόνο πραγματική λύση.

3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2005^x=2004x+1$ (Ε) έχει δύο ακριβώς ρίζες

Λύση

Η (Ε) έχει προφανείς ρίζες τους αριθμούς x = 0 , x = 1.
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει άλλη μία ρίζα ρ, δηλαδή έχουμε ότι: $f(0)=f(1)=f(\rho)=0$,
Ας θεωρήσουμε συνάρτηση με τύπο $f(x)=2005^x-2004x-1$.
Τότε οι τρεις ρίζες (ανεξάρτητα από τη διάταξή τους) ορίζουν δύο διαστήματα, σε κάθε ένα από τα οποία εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f.
Έτσι, υπάρχουν δύο αριθμοί $\xi_1,\xi_2 \;\; με \;\; \xi_1<\xi_2$, που ανήκουν σε αυτά τα (ανοικτά) διαστήματα , με $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, $όπου \quad f'(x)=2005^x\cdot\ln 2005-2004$, $x\in\mathbb{R}$.
Τότε, επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, εφαρμόζοντας το Θ. Rolle για τη συνάρτηση f ΄ στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ προκύπτει μία τουλάχιστον ρίζα για την εξίσωση f ΄΄(x) = 0.
Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί: $f''(x)=2005^x\cdot\ln^2 2005 \neq 0 \quad για \;\; κάθε \;\; x\in\mathbb{R}$.
Επομένως η εξίσωση (Ε) έχει δύο ακριβώς ρίζες, το 0 και το 1.

4) Αν το σημείο Μ (α ,β) ανήκει σε εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ (2 ,0) και ακτίνα ρ = 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $3(\alpha-2)^2 x^3+4\beta^2 x-1=0$ (Ε) έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0 ,1).

Λύση

Επειδή το σημείο Μ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, έχουμε ότι: $(\alpha-2)^2+\beta^2=1$ (1)

Θεωρούμε συνάρτηση, με $f(x)=3(\alpha-2)^2 x^3+4\beta^2 x-1$, $x\in[0,1]$

Ισχύουν: f (0) = – 1 < 0 και $f(1)=3(\alpha-2)^2+4\beta^2-1\overset{(1)}{=}3(1-\beta^2)+4\beta^2-1=\beta^2+2>0$

Συνεπώς: f (0) f (1) < 0.

Επιπλέον η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [0 ,1] ως πολυωνυμική.

Έτσι, από το Θ. Bolzano η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0 ,1).

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική, αφού:

$f'(x)=9(\alpha-2)^2 x^2+4\beta^2\geq 0$ *για κάθε* $x\in[0,1]$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

5) Δίνεται η εξίσωση: $(2-x)e^x-1=0$ (Ε)

ι) Να αποδείξετε ότι η (Ε) έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\mathrm{A}=[1,+\infty)$.

ιι) Έστω η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\geq 1$

Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι: $f_{\max}(x)=\dfrac{1}{\alpha-1}$, όπου α η ρίζα της (Ε).

Λύση

ι) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(2-x)e^x-1,\quad x\in\mathrm{A}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα συνεχής) με $g'(x)=(1-x)e^x,\quad x\in\mathrm{A}$. Παρατηρούμε ότι $g'(x)\leq 0$ *για κάθε* $x\geq 1$, επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Α.

Επίσης: $g(1)=e-1>0$ *και* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

Άρα το Σύνολο Τιμών της g είναι το διάστημα $g(\mathrm{A})=(-\infty,\, e-1]$

Επειδή το Σύνολο Τιμών της g περιέχει το 0 (μηδέν), υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(1,+\infty)$,

τέτοιο ώστε: $g(\alpha)=0\Leftrightarrow(2-\alpha)e^\alpha-1=0$ (1)

Επιπλέον, επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο Α, το α είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (Ε).

ιι) Για κάθε $x\geq 1$ έχουμε ότι:

η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\cdots=\dfrac{(2-x)e^x-1}{(e^x-x)^2}$, δηλαδή $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$

Είναι: $f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x=\alpha$

Ενώ:
$$f'(x)>0\Leftrightarrow g(x)>0\Leftrightarrow g(x)>g(\alpha)\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}x<\alpha$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow g(x)<0\Leftrightarrow g(x)<g(\alpha)\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}x>\alpha$$

Έτσι διαπιστώνουμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0=\alpha$ ολικό μέγιστο.

Άρα $f_{\max}(x)=f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-1}{e^a-a}\overset{(1)}{=}\dfrac{\dfrac{1}{2-\alpha}-1}{\dfrac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\cdots=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $g(x)=1998x+\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

ι) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g $\sigma\tau o$ $+\infty$.

ιι) Θεωρούμε τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f''(x)>0$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x>0$.
Αν η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με την πλάγια ασύμπτωτη της g, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f'(x)-f(x)=0$ (Ε) έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

<u>Λύση</u>

ι) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-1998x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$$

Επομένως , η ευθεία με εξίσωση (ε): $\psi=1998x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g.

ιι) Επειδή η C_f $\kappa\alpha\iota$ η (ε) έχουν δύο κοινά σημεία, προκύπτει ότι υπάρχουν

$$x_1,x_2\in(0,+\infty),\,(x_1<x_2):\left.\begin{array}{l}f(x_1)=1998x_1\\ f(x_2)=1998x_2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=1998 \qquad (1).$$

Η σχέση (1) δημιουργεί τις προϋποθέσεις να εφαρμόσουμε το Θ. Rolle ,
για τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[x_1,x_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), με $h(x_1)=h(x_2)$.

Επομένως υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2):h'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)=0$.

Άρα η εξίσωση (Ε) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτή η ρίζα είναι μοναδική.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=x\cdot f'(x)-f(x)$, $x\in(0,+\infty)$

Ισχύει: $F'(x)=f'(x)+x\cdot f''(x)-f'(x)\Leftrightarrow F'(x)=x\cdot f''(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$

Έτσι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση:
$F(x)=0\Leftrightarrow x\cdot f'(x)-f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Επομένως, η εξίσωση (Ε) έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

7) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(\alpha+\beta,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $0<\alpha<\beta$ και $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=\alpha\beta+2\beta$ (1).

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x-\int_\alpha^x f(t)\,dt=-\beta$ (Ε), έχει μοναδική λύση στο διάστημα (α ,β).

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\alpha x-\int_\alpha^x f(t)\,dt+\beta$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Επειδή η f είναι συνεχής, έπεται ότι και η g είναι συνεχής στο [α ,β]. Επιπλέον

$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha)=\alpha^2+\beta>0 \\ g(\beta)=\alpha\beta-\int_\alpha^\beta f(t)dt+\beta \overset{(1)}{=} -\beta<0 \end{array}\right| \Rightarrow g(\alpha)g(\beta)<0 \ ,$$

επομένως βάσει του Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (\alpha,\beta)$: $g(\rho_1)=0$,
δηλαδή η εξίσωση (Ε) έχει μία τουλάχιστον λύση.

Υποθέτουμε ότι η (Ε) έχει και άλλη λύση, έστω $\rho_2 \in (\alpha,\beta) \quad \mu\varepsilon \quad (\rho_1<\rho_2 \quad \acute{\eta} \quad \rho_2<\rho_1)$
Τότε $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$, οπότε δημιουργούνται οι προϋποθέσεις να εφαρμόσουμε το Θ. Rolle
για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2] \ \acute{\eta} \ [\rho_2,\rho_1]$.
Επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1,\rho_2) \ \acute{\eta} \ \xi \in (\rho_2,\rho_1) \subset (\alpha,\beta)$: $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \alpha-f(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\alpha$
Το οποίο όμως είναι άτοπο, διότι $\alpha \notin (\alpha+\beta\ , +\infty)$
Έτσι η εξίσωση (Ε) έχει μοναδική λύση στο διάστημα (α ,β).

8) ι) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x\cdot e^x = 3e^2$, $x \in (0,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

ιι) Ένα σημείο Α(x ,0) κινείται στο θετικό ημιάξονα Ox, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm /sec. Έστω Ε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία Ο (0,0), Α(x ,0), Β(x,e^x).
Να βρείτε την τιμή του x , τη χρονική στιγμή που το εμβαδόν Ε μεταβάλλεται με ρυθμό $3cm^2$/sec.

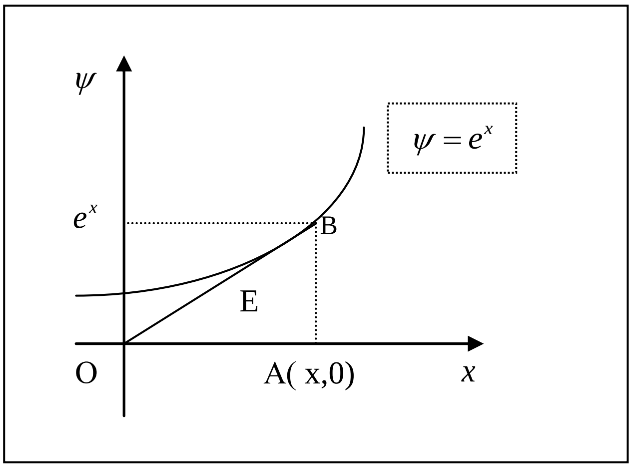
<u>Λύση</u>

ι) Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η x = 2.
Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=e^x+x\cdot e^x-3e^2$, $x\in(0,+\infty)$
Ισχύει: $f'(x)=2e^x+xe^x=e^x(2+x)>0 \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x>0.$
Οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, επομένως η εξίσωση f (x) = 0 έχει μοναδική λύση τη x = 2.

ιι) Όπως φαίνεται στο σχήμα , είναι:

$\mathrm{E}=\mathrm{E}(x)=\dfrac{xe^x}{2}$ και επειδή το x είναι συνάρτηση του χρόνου, $\mathrm{E}(t)=\dfrac{x(t)\cdot e^{x(t)}}{2}$ (1)

Έχουμε $x'(t)=x'(t_0)=2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{E}'(t_0)=3e^2$
Από τη σχέση (1) με παραγώγιση, έχουμε:



$$\mathrm{E}'(t)=\frac{1}{2}\left[x'(t)\cdot e^{x(t)}+x(t)\cdot x'(t)\cdot e^{x(t)}\right]$$

Άρα:

$$\mathrm{E}'(t_0)=\frac{1}{2}\left[2e^{x(t_0)}+2x(t_0)\cdot e^{x(t_0)}\right] \Leftrightarrow$$

$$3\cdot e^2=e^{x(t_0)}+x(t_0)\cdot e^{x(t_0)}$$

Σύμφωνα όμως με το (ι) ερώτημα, η εξίσωση $3e^2=e^x+xe^x$ έχει μοναδική λύση την x = 2.

Επομένως : $x(t_0)=2cm$

Δ΄ ΜΕΡΟΣ

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δε γνωρίζουμε πόσες λύσεις ενδέχεται να έχει η εξίσωση f (x) = 0.
Αν μπορούμε να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε την εξίσωση.
Διαφορετικά, η ιδιότητα του αμφιμονοσήμαντου (΄΄1 – 1΄΄) της f, μπορεί να μας βοηθήσει να λύσουμε την εξίσωση.

<u>Παραδείγματα</u>

1) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $2x^3-3x^2-1=0$

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με $f'(x)=6x^2-6x$, $x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, έτσι ώστε να μάθουμε πόσες το πολύ ρίζες έχει η εξίσωση και πού βρίσκονται αυτές.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0 \ \text{ή}\ x=1$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow x<0\ ,\ x>1$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$$

Δηλαδή η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνήσια φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Δηλαδή η εξίσωση f (x) = 0 έχει τρεις το πολύ ρίζες, μία σε κάθε διάστημα.

Για $x\in(-\infty,0]$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ *και* $f(0)=-1$. Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $(-\infty,-1]$.
Επειδή ο αριθμός μηδέν δεν ανήκει στο σύνολο τιμών, δεν υπάρχει ρίζα.
Για $x\in[0,1]$: $f(0)=-1$ *και* $f(1)=-2$. Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-2,-1]$.
Επειδή ο αριθμός μηδέν δεν ανήκει στο σύνολο τιμών, δεν υπάρχει ρίζα.

Για $x\in[1,+\infty)$: $f(1)=-2$ *και* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-2,+\infty)$.
Επειδή ο αριθμός μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, υπάρχει ρίζα.

Επομένως , συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση f (x) = 0 , έχει μία μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,+\infty)$.
Παρεμπιπτόντως , το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι η ένωση των επιμέρους συνόλων τιμών, δηλαδή το διάστημα $(-\infty,-1]\cup[-2,-1]\cup[-2,+\infty)=\mathbb{R}$.

2) Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^x \frac{2+(\ln t)^{2\nu}}{t}\,dt = 2+\frac{1}{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

Η εξίσωση, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα, γίνεται: $2\ln x + \frac{1}{2\nu+1}\cdot(\ln x)^{2\nu+1} - 2 - \frac{1}{2\nu+1} = 0$, $x>0$

Η εξίσωση έχει προφανή λύση τη x = e.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση f , με τύπο το πρώτο μέλος της εξίσωσης.

Τότε $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{(\ln x)^{2\nu}}{x} > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0,+\infty)$

Δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη x = e.

3) Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - x$,

στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = x+2-x^2.$

Λύση

Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με $f'(x) = \ln\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$.

(υπενθυμίζεται ότι ln 2/3 < 0). Δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το R.

Η εξίσωση γίνεται : $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} - (x+2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} - x^2 \Leftrightarrow f(x+2) = f(x^2)$ (1)

Επειδή όμως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , έπεται ότι είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄

Έτσι η (1) γίνεται : $x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad ή \quad x = 2$

4) Δίδεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad με \quad f(f(x)) + f^3(x) = 2x+3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(2x^3+x) = f(4-x)$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad με \quad f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε:

επειδή η f είναι συνάρτηση, ισχύει $f(f(x_1)) = f(f(x_2)$ (1)

επίσης $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ (2)

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε ότι :

$f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄

β) Επειδή η συνάρτηση f είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄, η εξίσωση γίνεται :

$$f\left(2x^3+x\right)=f\left(4-x\right)\Leftrightarrow 2x^3+x=4-x\Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0 \quad (\text{E})$$

Παραγοντοποιούμε με τη βοήθεια του σχήματος HORNER, έτσι έχουμε:

$$(x-1)\left(2x^2+2x+4\right)=0\Leftrightarrow x=1$$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Υπάρχει το ενδεχόμενο η εξίσωση (Ε) να μη λύνεται με κλασικούς τρόπους. Τότε θα χρησιμοποιήσουμε τις διάφορες μεθοδεύσεις με τη βοήθεια της Ανάλυσης.

5) Δίδεται συνάρτηση f , η οποία αντιστρέφεται και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,4). Να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(2+f(x^2-3)\right)=2$

<u>Λύση</u>

Αφού η συνάρτηση αντιστρέφεται, έπεται ότι είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄

Έτσι έχουμε :

$$f^{-1}\left(2+f(x^2-3)\right)=2\Leftrightarrow 2+f\left(x^2-3\right)=f\left(2\right)\overset{f(2)=4}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(x^2-3\right)=2\overset{f(1)=2}{\Leftrightarrow} f\left(x^2-3\right)=f(1)\overset{f\ ''1-1''}{\Leftrightarrow} x^2-3=1\Leftrightarrow x=\pm 2$$

6) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=x^{2005}+x^{2003}$.

α) Να βρείτε την τιμή f (1)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄ στο R

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^{2003}=2-x^{2005}$

<u>Λύση</u>

α) Η f για x = 1 γίνεται: f (1) = 2

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}\quad \mu\varepsilon\quad f(x_1)=f(x_2)$

Τότε :

$$x_1^{2005}+x_1^{2003}=x_2^{2005}+x_2^{2003}\Leftrightarrow x_1^{2005}-x_2^{2005}+x_1^{2003}-x_2^{2003}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^{2004}+\cdots+x_2^{2004}\right)+\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^{2002}+\cdots+x_2^{2002}\right)=0\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x_1=x_2\quad \delta\iota\acute{o}\tau\iota\quad \mathrm{A}+\mathrm{B}>0$$

(όπου Α , Β οι δύο παρενθέσεις).

Άρα η συνάρτηση f είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄

Εναλλακτικά, για την απόδειξη του ΄΄ 1 – 1 ΄΄, θα μπορούσαμε να ελέγξουμε τη μονοτονία .

Δηλαδή: $f'(x)=2005\cdot x^{2004}+2003\cdot x^{2002}\geq 0\quad \gamma\iota\alpha\quad \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\quad x\in\mathbb{R}$.

(η ισότητα προκύπτει στο μεμονωμένο σημείο με τετμημένη χ = 0)

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και ΄΄ 1 – 1 ΄΄ .

γ) Η εξίσωση γίνεται : $f(x)=2\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$

7) Έστω οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το R.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄
α) Να δείξετε ότι η g είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

<u>Λύση</u>

α) Η fog έχει και αυτή πεδίο ορισμού το R και αφού είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄, έχουμε:
Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \mu\varepsilon \quad (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2) \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad x_1=x_2$ (1)
Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon \quad g(x_1)=g(x_2)$
Τότε επειδή η f είναι συνάρτηση, έχουμε ότι $f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right) \Leftrightarrow (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$
και λόγω της (1) , $x_1=x_2$. Επομένως η συνάρτηση g είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄

β) Επειδή η g είναι ΄΄ 1 – 1 ΄΄, η εξίσωση γίνεται :
$f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Leftrightarrow x^3-x=2x-1 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$
Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=x^3-3x+1$, $x\in\mathbb{R}$
Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία ενδεχομένως υπάρχουν οι ρίζες της εξίσωσης h (x) = 0, βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της h. Έτσι έχουμε : $h'(x)=3x^2-3$, $x\in\mathbb{R}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$,
Τότε : $h'(x)>0 \Leftrightarrow x<-1 \ \acute{\eta} \ x>1$,
$h'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$

x	-∞		-1		1		+∞
h΄		+	0	-	0	+	
h		↗		↘		↗	

Επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$, γνήσια φθίνουσα στο $[-1,1]$ και γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Δηλαδή η εξίσωση έχει τρεις το πολύ ρίζες, καθεμία στα αντίστοιχα διαστήματα.
Τώρα εργαζόμαστε σε καθένα από τα διαστήματα ξεχωριστά, προσπαθώντας να βρούμε αν υπάρχουν ρίζες

Για $x\in(-\infty,-1]$: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty \ \kappa\alpha\iota \ h(-1)=3$. Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $(-\infty,3]$.
Επειδή το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, υπάρχει μία ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(-\infty,-1)$, δηλαδή είναι αρνητική.

Για $x\in[-1,1]$: $h(-1)=3 \ \kappa\alpha\iota \ h(1)=-1$. Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα [–1,3].
Επειδή το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, υπάρχει μία ρίζα, η οποία όμως ανήκει στο διάστημα (–1,1), έτσι δεν μπορούμε να εξάγουμε ότι είναι θετική. Για το λόγο αυτό, αναγκαζόμαστε να περιορίσουμε το εύρος του διαστήματος και να εργαστούμε στο διάστημα [0,1]. Είναι h(0) = 1, οπότε το σύνολο τιμών περιορίζεται στο διάστημα [h(1), h(0)] = [–1,1]. Το μηδέν ανήκει και στο νέο σύνολο τιμών, επομένως υπάρχει ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα (0,1), οπότε είναι θετική.

Για $x\in[1,+\infty)$: $h(1)=-1 \ \kappa\alpha\iota \ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-1,+\infty)$.
Επειδή το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, υπάρχει μία ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,+\infty)$, οπότε είναι θετική.

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Ε΄ ΜΕΡΟΣ

Αρκετές ασκήσεις ξεφεύγουν από τη συγκεκριμένη μεθοδολογία.
Έτσι πολλές φορές χρησιμοποιώντας τη θεωρία της Ανάλυσης μετατρέπουμε τις εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες, περισσότερο προσιτές στην επίλυσή τους.

Παραδείγματα

1) Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ (1)
Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ και α , ώστε να ισχύει :

$$f(x)=\int_{\alpha}^{x}\left(\lambda u^2+\mu u\right)\cdot e^{-u}du+c \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Λύση

Η ισότητα (2) για x = α δίνει f (α) = c , ενώ από την (1) έχουμε ότι f (α) = 0. Άρα c = 0.
Η f είναι παραγωγίσιμη, έτσι από τις (1) και (2) αντίστοιχα παίρνουμε :

$$f'(x)=e^{-x}-(x-\alpha)e^{-x}=e^{-x}\left(-x+\alpha+1\right) \quad \text{και} \quad f'(x)=\left(\lambda x^2+\mu x\right)e^{-x}$$

Οι τελευταίες ισχύουν ταυτόχρονα, όταν :

$$\left(-x+\alpha+1\right)e^{-x}=\left(\lambda x^2+\mu x\right)e^{-x} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$\text{ή} \quad -x+\alpha+1=\lambda x^2+\mu x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Από την τελευταία ισότητα πολυωνύμων, προκύπτει ότι : λ = 0 , μ = –1 , α = –1

2) Δίδονται οι πραγματικοί αριθμοί α , β , γ , δ με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $\beta-\alpha=\delta-\gamma$.
Να λύσετε την εξίσωση : $\alpha^x+\delta^x=\beta^x+\gamma^x$, $x\in\mathbb{R}$. (Ε)

Λύση

Η εξίσωση (Ε) είναι ισοδύναμη με τη : $\beta^x-\alpha^x=\delta^x-\gamma^x \Leftrightarrow \dfrac{\beta^x-\alpha^x}{\beta-\alpha}=\dfrac{\delta^x-\gamma^x}{\delta-\gamma}$ (1)

Η τωρινή μορφή της εξίσωσης μας θυμίζει το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Έτσι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, $t\in\left(0,+\infty\right)$, η οποία είναι

- συνεχής στα διαστήματα [α , β] και [γ , δ]
- παραγωγίσιμη στα (α , β) και (γ , δ), με $f'\left(t\right)=x\cdot t^{x-1}$, $t>0$

Οπότε ισχύει το Θ.Μ.Τ. στα αντίστοιχα διαστήματα, επομένως υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\beta\right)$ και $\xi_2\in\left(\gamma,\delta\right)$

ώστε : $f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow x\cdot\xi_1^{x-1}=\dfrac{\beta^x-\alpha^x}{\beta-\alpha}$ και $f'\left(\xi_2\right)=\dfrac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}\Leftrightarrow x\cdot\xi_2^{x-1}=\dfrac{\delta^x-\gamma^x}{\delta-\gamma}$

Επομένως η (1) γίνεται :

$$x\cdot\xi_1^{x-1}=x\cdot\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow x\left(\xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow \boxed{x=0} \text{ ή } \xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1}=0\Leftrightarrow$$

$$\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1}\overset{\xi_2\neq0}{\Leftrightarrow}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow\boxed{x=1}.$$

Έτσι δείξαμε ότι η εξίσωση (Ε) έχει δύο λύσεις, τη x = 0 και x = 1.

3) Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ $\quad$ *ώστε* $\gamma^2+\alpha\gamma+\beta\gamma<0.$
Να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες , από τις οποίες η μία τουλάχιστον βρίσκεται στο διάστημα (0 ,1).

Λύση

Επειδή η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού, για να έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες , πρέπει η διακρίνουσα να είναι θετική. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι : $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$
Έχουμε ότι :

$$\gamma^2+\alpha\gamma+\beta\gamma<0\Leftrightarrow\alpha\gamma<-\left(\beta\gamma+\gamma^2\right)\Leftrightarrow-4\alpha\gamma>4\beta\gamma+4\gamma^2\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma>\beta^2+4\beta\gamma+4\gamma^2\Leftrightarrow$$

$$\Delta>\left(\beta+2\gamma\right)^2\geq 0\ ,\quad \textit{δηλαδή}\quad \Delta>0.$$

Επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0 ,1] ως πολυωνυμική, με

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\gamma \\ f(1)=\alpha+\beta+\gamma \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(1)=a\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0 \qquad \text{(από την υπόθεση)}$$

Έτσι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, επομένως η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον από τις δύο ρίζες της στο διάστημα (0 ,1).

4) Δίδεται συνάρτηση f ορισμένη στο R, η οποία έχει μονομελές σύνολο τιμών.
Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(x-2\right)+2\ln x-f\left(f(x+2)\right)+1=0$, $x\in\left(0,+\infty\right)$

Λύση

Θεωρούμε συνάρτηση f , με σύνολο τιμών $f\left(\mathbb{R}\right)=\{\kappa\}$.
Τότε ισχύει ότι : $f\left(x-2\right)=f\left(f(x+2)\right)=\kappa$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έτσι η εξίσωση γίνεται : $\kappa+2\ln x-\kappa+1=0\Leftrightarrow 2\ln x=-1\Leftrightarrow\ln x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

5) Δίδεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα [0 ,1], με $f(0)=0$ *και* $f'(1)=f(1)$,
να δείξετε ότι η εξίσωση $f''\left(x\right)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0 ,1).

Λύση

Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο διάστημα [0 ,1] ,
έτσι υπάρχει $x_1\in\left(0,1\right)$: $f'\left(x_1\right)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow f'\left(x_1\right)=f(1)\quad (1)$
Για τη συνάρτηση f ΄ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $\left[x_1,1\right]$,
διότι $f'\left(x_1\right)\overset{(1)}{=}f(1)\overset{(\upsilon\pi)}{=}f'(1)$
Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(x_1,1\right)\subset\left(0,1\right)$: $f''\left(x_0\right)=0.$

ΕΝΟΤΗΤΑ 11η:
Η ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο παρόν κεφάλαιο θα γνωρίσουμε με ποιόν τρόπο χρησιμοποιείται η Ανάλυση , έτσι ώστε :
να αποδείξουμε Ανισοτικές Σχέσεις , να λύσουμε Ανισώσεις , καθώς επίσης να χρησιμοποιήσουμε τις Ανισοτικές Σχέσεις στην επίλυση προβλημάτων.
Απαραίτητο είναι ξεκινώντας να θυμηθούμε τις ιδιότητες της διάταξης στους πραγματικούς αριθμούς, κυρίως αυτές που αφορούν στο πότε παραμένει και πότε αλλάζει η φορά μιας ανίσωσης.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

Επίλυση ασκήσεων στις οποίες μας ζητείται να αποδείξουμε την αλήθεια μιας Ανισοτικής Σχέσης.
Αυτό μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους :

- Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής
- Με τη βοήθεια της Μονοτονίας
- Με τη βοήθεια των Ακρότατων
- Με τη βοήθεια του Συνόλου Τιμών
- Με τη βοήθεια της Κυρτότητας

1η Περίπτωση

Χρησιμοποιούμε το Θ.Μ.Τ. κυρίως σε περιπτώσεις διπλών ανισοτικών σχέσεων.
Το πρώτο, το οποίο πρέπει να διακρίνουμε, είναι για ποια συνάρτηση και σε ποιο διάστημα θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. Αυτό φαίνεται , μερικές φορές μετά από κάποια επεξεργασία, από τη μορφή της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε.

1ο Παράδειγμα

Να δείξετε ότι ισχύει : $2-\frac{e}{2}< \ln 2<\frac{2}{e}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=\ln x$. Για τη g ισχύουν :

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα [2 , e]
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (2 , e), με $g'(x)=\frac{1}{x}$

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(2,e):g'(\xi)=\frac{g(e)-g(2)}{e-2}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{1-\ln 2}{e-2}$ (1)

Έχουμε όμως ότι :

$$\xi \in (2,e) \Leftrightarrow 2<\xi<e \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{e} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e}<\frac{1-\ln 2}{e-2}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{e-2}{e}<1-\ln 2<\frac{e-2}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{e}<1-\ln 2<\frac{e}{2}-1 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{2}{e}<-\ln 2<\frac{e}{2}-2 \Leftrightarrow 2-\frac{e}{2}<\ln 2<\frac{2}{e}$$

<u>2^ο Παράδειγμα</u>

Δίδεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [0 ,4]

με $f(0)=1$ και $2 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (0,4)$.

Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση : $9 \le f(4) \le 21$

<u>Λύση</u>

Για τη συνάρτηση f ισχύουν :

- Η f είναι συνεχής στο [0 ,4]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 ,4)

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0,4)$: $f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(4)-1}{4}$ (1)

Επειδή $\xi \in (0,4)$, από τα δεδομένα έχουμε ότι :

$$2 \le f'(\xi) \le 5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 \le \frac{f(4)-1}{4} \le 5 \Leftrightarrow 8 \le f(4)-1 \le 20 \Leftrightarrow 9 \le f(4) \le 21$$

<u>3^ο Παράδειγμα</u>

Να δείξετε ότι : $\left|\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2\psi\right| \le |x-\psi|$, $x,\psi \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $x \ne \psi$.

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε ότι $x<\psi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(t)=\sigma\upsilon\nu^2 t$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [x ,ψ], αφού είναι συνεχής στο [x ,ψ] και παραγωγίσιμη στο (x ,ψ) , με $f'(t)=2\sigma\upsilon\nu t\cdot(-\eta\mu t)=-\eta\mu 2t$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x,\psi)$: $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\psi)}{x-\psi} \Leftrightarrow -\eta\mu 2\xi=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2\psi}{x-\psi}$ (1)

Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε, γίνεται ισοδύναμα:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2\psi}{x-\psi}\right| \le 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |-\eta\mu 2\xi| \le 1 \Leftrightarrow |\eta\mu 2\xi| \le 1,$$

η οποία είναι μία σχέση που ισχύει πάντα.

Όμοια αποδεικνύεται η περίπτωση x > ψ.

4ο Παράδειγμα

Να δείξετε ότι : $x+1 \le e^x \le x \cdot e^x + 1 \quad για \quad κάθε \quad x \in \mathbb{R}$

Λύση

Η σχέση γίνεται ισοδύναμα : $x \le e^x - 1 \le x \cdot e^x \Leftrightarrow x \le e^x - e^0 \le x \cdot e^x$

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(t) = e^t$

- Αν $x > 0$, τότε για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0 , x], οπότε υπάρχει

  $$\xi \in (0,x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1)$$

  Επειδή :

  $$0 < \xi < x \quad έχουμε \ (επειδή \ f \nearrow) \quad e^0 < e^{\xi} < e^x \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

  $$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < e^x - 1 < x \cdot e^x$$

- Αν $x < 0$, από το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα [x , 0], όμοια έχουμε ότι: $x < e^x - 1 < x \cdot e^x$
- Αν $x = 0$, έχουμε ότι: $1 = e^0 = 1$

Επομένως για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει ότι: $x+1 \le e^x \le x \cdot e^x + 1$

5ο Παράδειγμα

Δίδεται συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R , με παράγωγο f ΄ γνησίως αύξουσα.
Τότε να δείξετε ότι : $2f(1) < f(0) + f(2) \quad (1)$

Λύση

Η (1) ισοδύναμα γίνεται : $f(1) - f(0) < f(2) - f(1) \quad (2)$

Για τη συνάρτηση f στα διαστήματα [0 ,1] και [1 ,2] ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.,
οπότε υπάρχουν

$$\xi_1 \in (0,1) : f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} = f(1) - f(0) \qquad (3)$$

$$και \quad \xi_2 \in (1,2) : f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) \qquad (4)$$

Επειδή η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε :

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \overset{(3),(4)}{\Longleftrightarrow} f(1) - f(0) < f(2) - f(1)$$

δηλαδή η δοθείσα.

6ο Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x^{23}}{\left(1-x^2\right)^{24}}$, $0<x<1$

ι) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$.

ιι) Αν $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι :

$$\left(\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}\right)^{23}<\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}\right)^{48}$$

Λύση

ι) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $f'(x)=\cdots=\dfrac{23x^{22}+25x^{24}}{\left(1-x^2\right)^{25}}>0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$.

ιι) Έχουμε :

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu x:\uparrow}{\Longleftrightarrow}0<\eta\mu\alpha<\eta\mu\beta<1\overset{f:\uparrow}{\Longleftrightarrow}f\left(\eta\mu\alpha\right)<f(\eta\mu\beta)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^{23}\alpha}{\left(1-\eta\mu^2\alpha\right)^{24}}<\frac{\eta\mu^{23}\beta}{\left(1-\eta\mu^2\beta\right)^{24}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu^{23}\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{48}\alpha}<\frac{\eta\mu^{23}\beta}{\sigma\upsilon\nu^{48}\beta}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}\right)^{23}<\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}\right)^{48}$$

7ο Παράδειγμα

Δίδεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Αν υπάρχει $\gamma\in\left(\alpha,\beta\right)$ *ώστε* $f(\gamma)>0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right): f''\left(\xi\right)<0$.

Λύση

Φαίνεται ότι πρέπει να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f ΄. Πρέπει όμως να βρούμε σε ποιο διάστημα.

Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [α ,γ] και [γ ,β].

Έτσι έχουμε ότι :

$$f'\left(\xi_1\right)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}>0\ ,\ \ \mu\varepsilon\ \ \alpha<\xi_1<\gamma$$

$$f'\left(\xi_2\right)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\beta}<0\ ,\ \ \mu\varepsilon\ \ \gamma<\xi_2<\beta$$

Εξασφαλίζονται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' *στο διάστημα* $\left[\xi_1,\xi_2\right]$.

Επομένως υπάρχει

$$\xi\in\left(\xi_1,\xi_2\right),\ \ \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \ \xi\in\left(\alpha,\beta\right):\ \ f''\left(\xi\right)=\frac{f'\left(\xi_2\right)-f'\left(\xi_1\right)}{\xi_2-\xi_1}<0$$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ f'\left(\xi_2\right)<0\ ,\ f'\left(\xi_1\right)>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \xi_2-\xi_1>0$$

<u>2η Περίπτωση</u>

Ο ορισμός της μονοτονίας εμπεριέχει τη λογική της διάταξης. Έτσι χρησιμοποιείται για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων.

<u>1ο Παράδειγμα</u>

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης

β) Να αποδείξετε ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της, με $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$.

Τότε έχουμε:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln e\Leftrightarrow 0<x<e$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\cdots x>e$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow\cdots x=e$

Έτσι προκύπτει:

x	0		e		+∞
f΄		+	0	-	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

β) Επειδή $e<\pi$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, έπεται ότι

$$f(e)>f(\pi)\Rightarrow\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln e^{\pi}>\ln\pi^{e}\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}.$$

<u>2ο Παράδειγμα</u>

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f'(x)<\lambda f(x)\ \ \textit{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R},\ \ \textit{με}\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση g, *με* $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{\lambda x}}$ ως προς τη μονοτονία της.

β) Να αποδείξετε ότι : $e^{2005\lambda}f(2004)>e^{2004\lambda}f(2005)$

<u>Λύση</u>

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^{\lambda x}-\lambda e^{\lambda x}f(x)}{e^{2\lambda x}}=\dfrac{e^{\lambda x}\left(f'(x)-\lambda f(x)\right)}{e^{2\lambda x}}=\dfrac{f'(x)-\lambda f(x)}{e^{\lambda x}}$

Επομένως από την υπόθεση $g'(x)<0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β) Ισχύει :

$$2004<2005\Rightarrow g(2004)>g(2005)\Rightarrow\frac{f(2004)}{e^{2004\lambda}}>\frac{f(2005)}{e^{2005\lambda}}\Rightarrow e^{2005\lambda}f(2004)>e^{2004\lambda}f(2005).$$

<u>3ο Παράδειγμα</u>

Να αποδείξετε την ανισοτική σχέση: $\eta\mu x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$, $x \in [0,+\infty)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x - x + \dfrac{1}{6}x^3$, $x \in [0,+\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, με

$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$, $x \in [0,+\infty)$.

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία της f , πρέπει να βρούμε το πρόσημο της παραγώγου της. Επειδή δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί με κλασικούς τρόπους, θεωρούμε μία άλλη συνάρτηση g , με

$g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$, $x \in [0,+\infty)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -\eta\mu x + x$, $x \in [0,+\infty)$. Τότε έχουμε :

- Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$ $\eta\mu x \leq |\eta\mu x| < |x| = x$, δηλαδή $g'(x) > 0$
- Για $x = 0$ $\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon$ $g'(0) = 0$

Επομένως ισχύει :

x	0	+∞
g΄	o	+
g	g(0)	↗

Έτσι έχουμε :

Αν $x > 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0,$ $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $f'(x) > 0$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.

Επειδή όμως $f(0) = 0$, $\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon$: $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\eta\mu x - x + \dfrac{1}{6}x^3 \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \geq x - \dfrac{1}{6}x^3$.

<u>4° Παράδειγμα</u>

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,3] με :

$f''(x) < 0$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in [1,3]$, $f(2) = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $f(3) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (2,3)$: $f'(\xi) = 1$.

β) Να βρείτε το πρόσημο της διαφοράς $f'(x) - 1$ στο διάστημα [1,3].

γ) Να αποδείξετε ότι :

$f(x) < x - 2$ $\acute{o}\tau\alpha\nu$ $1 \leq x < 2$ $\quad\kappa\alpha\iota\quad$ $f(x) > x - 2$ $\acute{o}\tau\alpha\nu$ $2 < x < 3$

<u>Λύση</u>

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) - x$.

Η g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο διάστημα [2,3] ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x) = f'(x) - 1$.

Επιπλέον έχουμε ότι $g(2) = f(2) - 2 = -2$ $\kappa\alpha\iota$ $g(3) = f(3) - 3 = -2$, $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $g(2) = g(3)$.

Επομένως για τη συνάρτηση g στο διάστημα [2,3] ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$.

Επειδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x) = f''(x) < 0$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in (1,3)$, έχουμε ότι η συνάρτηση g΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1,3].

Έτσι ο αριθμός ξ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

β) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις μεταβολές των συναρτήσεων $g'(x) = f'(x) - 1$, $g(x) = f(x) - x$.

x	1	2	ξ	3
f΄΄(x)		-	|	-
f΄(x)-1		↘ +	0	↘ -
f(x)-x		↗	Ο.Μ.	↘

Δηλαδή έχουμε :

$$1 \le x < \xi \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} g'(1) \ge g'(x) > g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 > 0$$

$$\xi < x \le 3 \Leftrightarrow \cdots\cdots f'(x) - 1 < 0$$

$$x = \xi \Leftrightarrow f'(x) - 1 = 0$$

γ) Ισχύει : g (2) = g (3)

Όταν $1 \le x < 2 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(2) \Leftrightarrow f(x) - x < -2 \Leftrightarrow f(x) < x - 2$

Όταν 2 < x < 3 έχουμε:

$$\alpha\nu \ x \in (2, \xi) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(2) \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\alpha\nu \ x \in (\xi, 3) \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x) > g(3)$$

Επειδή όμως είναι g (2) = g (3) , έχουμε:

Για κάθε $x \in (2,3)$ $\quad g(x) > g(2) \Leftrightarrow f(x) - x > -2 \Leftrightarrow f(x) > x - 2$.

<u>3η Περίπτωση</u>

Όπως στη μονοτονία, έτσι και ο ορισμός ακρότατου (ολικού ή τοπικού) εμπεριέχει τη λογική της διάταξης. Χρησιμοποιείται συνήθως στις ανισοϊσότητες αν και σε πολλές ασκήσεις μπορούμε να εργαστούμε και με τους δύο τρόπους.

1ο Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι $2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$ $\;\;για\;\; κάθε\;\; x \in (0, +\infty)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της, με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$.

Στη συνέχεια μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 1 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cdots x > 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \cdots 0 < x < 1$

Έτσι έχουμε τον πίνακα :

x	0	1	+∞
f΄	-	o	+
f	↘		↗

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x = 1, το $f(1) = 0$.
Δηλαδή ισχύει ότι : $f(x) \geq f(1)$ $\;\;για\;\; κάθε\;\; x \in (0, +\infty)$

Άρα : $2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$.

2ο Παράδειγμα

α) Να αποδείξετε ότι $x^3 \geq x^2 + \ln x$ $\;\;για\;\; κάθε\;\; x > 0$.

β) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = e^{2005}$, να αποδείξετε ότι :

$$\alpha^2(\alpha - 1) + \beta^2(\beta - 1) + \gamma^2(\gamma - 1) \geq 2005.$$

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - x^2 - \ln x$, $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με $f'(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x} = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x}$, $x > 0$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	+∞
f΄	-	o	+
f	↘	O.E.	↗

Έτσι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] , γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 1, το f (1) = 0.
Επομένως για κάθε $x > 0$ $\;ισχύει:$ $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq x^2 + \ln x$.

β) Λόγω του α) ερωτήματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^3\ge\alpha^2+\ln\alpha\\ \beta^3\ge\beta^2+\ln\beta\\ \gamma^3\ge\gamma^2+\ln\gamma\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma\Leftrightarrow$$

$$\alpha^3-\alpha^2+\beta^3-\beta^2+\gamma^3-\gamma^2\ge\ln(\alpha\beta\gamma)\Leftrightarrow\alpha^2(\alpha-1)+\beta^2(\beta-1)+\gamma^2(\gamma-1)\ge\ln\left(e^{2005}\right)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(\alpha-1)+\beta^2(\beta-1)+\gamma^2(\gamma-1)\ge 2005.$$

<u>3^o Παράδειγμα</u>

Σε αρκετές ασκήσεις υπάρχει συνδυασμός της θεωρίας της μονοτονίας, με τη θεωρία των ακρότατων, όπως στην άσκηση που ακολουθεί.

ι) Να αποδείξετε ότι: $x\le(x+1)\ln(x+1)$ *για κάθε* $x>-1$

ιι) Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $x>0$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της.

ιιι) Να αποδείξετε ότι: $2006^{2006}>2007^{2005}$

<u>Λύση</u>

ι) Θεωρούμε τη συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ ,\ \ x\in(-1,+\infty)\ \ \textit{και}$$

$$f'(x)=\ln(x+1)\ ,\ \ x>-1$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης είναι ο παρακάτω:

x	-1		0		+∞
f΄		-	o	+	
f		↘	Ο.Ε.	↗	

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο, επομένως ισχύει:

$$f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow(x+1)\ln(x+1)-x\ge 0\Leftrightarrow x\le(x+1)\ln(x+1)\quad ,\ x>-1$$

ιι) Είναι:

$$g'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}\quad ,\ \ x>0$$

Έτσι σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα είναι: $g'(x)<0$ *για κάθε* $x>0.$

Συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο Πεδίο Ορισμού της.

ιιι) Ισχύει ότι:

$$2005 < 2006 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(2005) > g(2006) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln(2006)}{2005} > \frac{\ln(2007)}{2006} \Leftrightarrow 2006 \cdot \ln(2006) > 2005 \cdot \ln(2007) \Leftrightarrow$$
$$\ln(2006)^{2006} > \ln(2007)^{2005} \Leftrightarrow 2006^{2006} > 2007^{2005}$$

4η Περίπτωση

Ως εναλλακτική επιλογή για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης.

1^{o} Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [\alpha, \beta]$.Αν $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ *για κάθε* $x \in (\alpha, \beta)$.

Λύση

Επειδή η δεύτερη παράγωγος της f είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι η πρώτη παράγωγός της f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ελέγξουμε τη μονοτονία της συνεχούς συνάρτησης f.
Για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. ROLLE στο διάστημα [α ,β], έτσι συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = 0$.
Το σημείο δε αυτό είναι μοναδικό, διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον,

- $\alpha < x < \xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα
- $\xi < x < \beta \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} 0 = f'(\xi) < f'(x)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα

Επομένως ισχύει :

x	α	ξ	β
f΄	-	ο	+
f	↘	f(ξ)	↗

Άρα το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης f είναι το $[f(\xi), 0]$

Επομένως για κάθε x στο (α, β) *ισχύει* $f(x) < 0$.

2^{o} Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}$, $x \in [2, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι:

ι) Για κάθε $x \geq 3$ *ισχύει*: $(x+1999)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x+1999} - (x-1)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x-1} > 2000$

ιι) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2002} > \frac{1000}{1001}$

Λύση

ι) Το πρώτο μέλος της ανισοτικής σχέσης μας θυμίζει το Θεώρημα Μέσης Τιμής.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[x-1, x+1999]$, $x \geq 3$.
Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Έτσι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x-1, x+1999)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x+1999) - f(x-1)}{2000} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1999)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x+1999} - f(x-1)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x-1} = f'(\xi)\cdot 2000$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι: $f'(\xi) > 1$, $x \geq 3$. (1)

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης της παραγώγου της f.

Είναι:

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\eta\mu\frac{\pi}{x} \quad \kappa\alpha\iota$$

$$f''(x) = \frac{\pi}{x^2}\eta\mu\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x^2}\eta\mu\frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x} = -\frac{\pi^2}{x^3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x} < 0$$

$$\gamma\iota\alpha \ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \ x > 2.$$

Έτσι η συνάρτηση f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$

Οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης θα είναι η $f'(2) = 0 + \frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)$

Για το πρώτο μέλος του αθροίσματος:

Θέτοντας $\frac{\pi}{x} = u$, $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x} = \lim\limits_{u\to 0}\sigma\upsilon\nu u = 1$

Για το δεύτερο μέλος του αθροίσματος χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής:

Έχουμε $\left|\frac{\pi}{x}\eta\mu\frac{\pi}{x}\right| \leq \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{x} \leq \frac{\pi}{x}\eta\mu\frac{\pi}{x} \leq \frac{\pi}{x}$ $\quad \kappa\alpha\iota \quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\pi}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{x}\eta\mu\frac{\pi}{x}\right) = 0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1 + 0 = 1$.

Επιπλέον επειδή η συνάρτηση f ΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$,

συμπεραίνουμε ότι το Σύνολο Τιμών της είναι το διάστημα: $f'([2, +\infty)) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Από το Σύνολο Τιμών παρατηρούμε ότι ισχύει: $f'(x) > 1$, $x \geq 2$.
Επομένως ισχύει η σχέση (1) και μέσω αυτής η δοθείσα.

ιι) Θέτοντας στην ανισότητα του πρώτου ερωτήματος όπου x = 3, έχουμε:

$$2002\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2002} - 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} > 2000 \Leftrightarrow 2002\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2002} > 2000 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2002} > \frac{1000}{1001}.$$

5η Περίπτωση

Γνωρίζουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται "κάτω" (αντίστοιχα "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

1ο Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη κυρτότητα

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο σημείο της Α (1,0).

γ) Να αποδείξετε ότι : $\ln x \le x-1$, $x\in(0,+\infty)$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ *και* $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$.

Επειδή για κάθε $x>0$ *ισχύει* $f''(x)<0$, έπεται ότι η f είναι κοίλη.

β) Επειδή $f'(1)=1$, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι:

$\varepsilon:\ \psi-0=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow \psi=x-1.$

γ) Επειδή η f είναι κοίλη, η γραφική παράσταση της βρίσκεται "κάτω" από την ευθεία ε.

Έτσι έχουμε ότι $\ln x\le x-1$, $x>0$.

Η ισότητα αφορά στο σημείο επαφής τους , το Α (1,0).

2ο Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^5+x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Αφού μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, να αποδείξετε ότι $f\left(e^x\right)\ge f(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Πεδίο Ορισμού της, διότι: $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$, $x\in\mathbb{R}$. (1)

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $g'(x)=e^x$ *και* $g''(x)=e^x>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α (0,1), είναι: $\psi=x+1$

Έτσι η συνάρτηση g είναι κυρτή και επομένως η γραφικής της παράσταση βρίσκεται "πάνω" από την εφαπτομένη της, δηλαδή ισχύει ότι: $e^x\ge x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Η ισότητα αφορά πάντοτε το σημείο επαφής, δηλαδή το Α (0,1).

Έχουμε όμως από την (1), ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι $f\left(e^x\right)\ge f(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Επίλυση ασκήσεων στις οποίες μας ζητείται να λύσουμε την ανίσωση.
Η μονοτονία της συνάρτησης είναι αυτή που κυρίως μας βοηθάει στην επίλυσή τους.

1ο Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση f, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (3,2) και Β (5,9). Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(f^{-1}(x^2-8x)-2\right)<2$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει ότι $3<5$ *και* $f(3)=2<9=f(5)$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα.
Ως εκ τούτου είναι "1-1", επομένως υπάρχει η αντίστροφή της, η οποία διέρχεται από τα σημεία Α΄(2,3) και Β΄(9,5) και είναι ομοίως γνησίως αύξουσα.

Έτσι έχουμε:

$$f\left(f^{-1}(x^2-8x)-2\right)<f\left(3\right)\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-8x\right)-2<3\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-8x\right)<5\Leftrightarrow$$
$$f^{-1}\left(x^2-8x\right)<f^{-1}\left(9\right)\Leftrightarrow x^2-8x<9\Leftrightarrow x^2-8x-9<0\Leftrightarrow -1<x<9$$

2ο Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$
Να ελέγξετε τη μονοτονία της συνάρτησης και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2>0$$

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x+1>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+\left(x^2+x+1\right)-\left(x+1\right)>0\Leftrightarrow e^{x^2+x+1}+\left(x^2+x+1\right)>e^{x+1}+\left(x+1\right)\Leftrightarrow$$
$$f\left(x^2+x+1\right)>f\left(x+1\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2+x+1>x+1\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Γ΄ ΜΕΡΟΣ

Επίλυση ασκήσεων στις οποίες ΔΙΔΕΤΑΙ ΩΣ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ μια ανισοτική σχέση.
Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του FERMAT, διότι η προϋπόθεσή του που αφορά στο ακρότατο εμπεριέχει τη λογική της διάταξης.

1ο Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $x \cdot f(x)+1 \le e^x + \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f (0) = 3.

Λύση

Η ανισοτική σχέση γίνεται ισοδύναμα $x \cdot f(x)+1-e^x-\eta\mu 2x \le 0$, $x \in \mathbb{R}$ (1)
την οποία θα προσπαθήσουμε να εκμεταλλευθούμε ως μία από τις τρεις προϋποθέσεις του Θ. Fermat , συγκεκριμένα αυτή που αφορά στο ακρότατο.
Έτσι θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x) = x \cdot f(x)+1-e^x-\eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$
Προσπαθούμε να βρούμε έναν αριθμό ο οποίος να μηδενίζει τη συνάρτηση g.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι g (0) = 0. Έτσι λόγω της σχέσης (1), έχουμε ότι

- $g(x) \le g(0)$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστο) στο σημείο $x_0 = 0$
- το 0 (μηδέν) είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g
- η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - e^x - 2\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, επομένως έχουμε ότι $g'(0) = f(0) - 3$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat , έτσι ισχύει ότι:
$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 3.$

2ο Παράδειγμα

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί της μονάδας και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$ $a_1\beta_1^x + \alpha_2\beta_2^x + \alpha_3\beta_3^x \ge \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (1) , τότε να αποδείξετε ότι: $\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\beta_3^{\alpha_3} = 1$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_1\beta_1^x + \alpha_2\beta_2^x + \alpha_3\beta_3^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \alpha_1 \ln\beta_1\, \beta_1^x + \alpha_2 \ln\beta_2\, \beta_2^x + \alpha_3 \ln\beta_3\, \beta_3^x$, $x \in \mathbb{R}$
και επιπλέον ισχύει ότι: $f(0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.
Έτσι λόγω της (1) , έχουμε ότι $f(x) \ge f(0)$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in \mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση για x = 0 παρουσιάζει ελάχιστη τιμή το f (0).
Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \ln\beta_1 + \alpha_2 \ln\beta_2 + \alpha_3 \ln\beta_3 = 0 \Leftrightarrow \ln\beta_1^{\alpha_1} + \ln\beta_2^{\alpha_2} + \ln\beta_3^{\alpha_3} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\beta_3^{\alpha_3}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\beta_3^{\alpha_3} = 1$$

3ο Παράδειγμα

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\textit{ισχύει}$ $e^x \geq x+1.$
β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\textit{ισχύει}$ $\alpha^x \geq x+1$, $\alpha > 0$ $\textit{να δείξετε ότι}$ $\alpha = e.$

Λύση

α) Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Βρίσκουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Η συνάρτηση είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$.
Επίσης παρουσιάζει ελάχιστο για x = 0 , δηλαδή ισχύει ότι:
$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$, $x \in \mathbb{R}$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x) = \alpha^x - x - 1,$ $x \in \mathbb{R},$ $\alpha > 0.$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\textit{με}$ $h'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$ και επιπλέον ισχύει ότι h (0) = 0.
Επειδή $\alpha^x \geq x+1 \Leftrightarrow \alpha^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(0)$, $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η συνάρτηση h για x = 0 παρουσιάζει ελάχιστο το h(0).

Επομένως από το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$h'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$$

Δ΄ ΜΕΡΟΣ

Επίλυση ασκήσεων στις οποίες μας ζητείται να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις στις οποίες υπάρχουν ολοκληρώματα. Βασιζόμαστε στην ειδική θεωρία από τα ολοκληρώματα:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α ,β] και $f(x)\geq 0,\ \ \textit{τότε}\ \ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

Αν επιπλέον η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει μία επέκταση των παραπάνω ιδιοτήτων, διότι έχει γενικότερο προσανατολισμό.

<u>1^ο Παράδειγμα</u>

Έστω δύο συναρτήσεις f , g συνεχείς σε διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)\leq g(x)\ \ \textit{για κάθε}\ \ x\in[\alpha,\beta],\ \ \textit{τότε}\ \ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

β) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f στο [α ,β] , τότε
$m(\beta-\alpha)\leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$

γ) Για κάθε $x\in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:
$\frac{1}{\nu+1}\leq \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{\nu}$

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε: $g(x)-f(x)\geq 0\ \ \textit{για κάθε}\ \ x\in[\alpha,\beta]$

Άρα: $\int_{\alpha}^{\beta}[g(x)-f(x)]dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

β) Ισχύει: $m\leq f(x)\leq M\ \ \ \textit{για κάθε}\ \ x\in[\alpha,\beta]$, επομένως σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx \Leftrightarrow m(\beta-\alpha)\leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$.

γ) Έχουμε:

$$\nu\leq x\leq \nu+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1}\leq \frac{1}{x}\leq\frac{1}{\nu}\ \ ,\textit{συνεπώς}\ \ \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{1}{\nu+1}dx \leq \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{1}{x}dx \leq \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{1}{\nu}dx \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1}\leq \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{\nu}.$$

<u>2^ο Παράδειγμα</u>

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi x > x\ ,\ \ \textit{για κάθε}\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f , με $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια ότι $R\eta\mu x > \frac{2R}{\pi}x\ ,\ \ R>0$

γ) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\eta\mu x}dx < \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$

<u>Λύση</u>

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x)=\varepsilon\varphi x - x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, με

$$g'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\varepsilon\phi^2 x\,,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Έτσι $g'(x)>0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota: g(x)>g(0)\Leftrightarrow \varepsilon\phi x - x>0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x > x.$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, με $f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\varepsilon\phi x > x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}>x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x<0$$

Επομένως η $f'(x)<0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Επιπλέον για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota: f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x}>\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow \eta\mu x>\frac{2x}{\pi}\overset{R>0}{\Leftrightarrow} R\eta\mu x>\frac{2R}{\pi}x \quad (1)$

γ) Από την (1) έχουμε ότι:

$$-R\eta\mu x<-\frac{2R}{\pi}x \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^{-R\,\eta\mu x}<e^{-\frac{2R}{\pi}x}\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\,\eta\mu x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}x}dx$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}x}dx=-\frac{\pi}{2R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2R}\left(e^{-R}-1\right)=\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$

Επομένως προκύπτει η ζητούμενη σχέση: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\,\eta\mu x}dx<\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 12η:
ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Ορισμός Αρχικής συνάρτησης ή Παράγουσας.
2. Θεώρημα για το σύνολο των παραγουσών μιας συνάρτησης.
3. Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος
   Παραδείγματα απλών συναρτήσεων, όπως: ημχ, συνχ, $e^x, 2x+2$ κλπ.
4. ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
5. Ιδιότητες πράξεων

   Παραδείγματα της μορφής: $\int \sqrt{x}dx, \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx, \int 3x(2x^2+1)dx, \int (2t-3)^2 dt, \int \left(e^x + \frac{2}{x}\right)dx,$
   $\int \frac{x^3+5x^2-3}{x}dx, \int \left(2\eta\mu x - 5\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx, \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx, \int \frac{x^2-4}{x+2}dx.$
6. Η σχέση: $\int f'(x)dx = f(x)+c$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

Ι) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης, η οποία ορίζεται από τη $\psi = \int \sigma\upsilon\nu x dx$, αν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο Α(π/2,2).

ΙΙ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης, για την οποία γνωρίζουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 1$ και ότι το διάγραμμά της περνά από το σημείο Α(0,5).

ΙΙΙ) Να βρείτε τη συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f''(x) = 12x^2 + 2$ και η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της Α(1,1) έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

ΙV) Σημείο Α που κινείται σε ευθεία (ε), απέχει κατά τη χρονική στιγμή t =0 sec από σταθερό σημείο Ο της (ε) 20cm και έχει ταχύτητα 1/2 cm/sec. Αν η επιτάχυνση του σημείου Α, κατά τη χρονική στιγμή t, δίνεται από τον τύπο α (t) = ημt, να βρεθούν:

α) η εξίσωση v(t) της ταχύτητας του κινητού

β) η εξίσωση s(t) της κίνησης του κινητού.

V) Να βρείτε τη συνάρτηση f, αν ισχύει: $f'(x)\cdot e^{f(x)} = 2x+1, x \in (0,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο Α(1,f(1)) έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 3/5.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ “ *ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ* ”

Εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$, όπου u = g(x) και du = g΄(x)dx

Τυποποίηση μερικών βασικών μορφών ολοκληρωμάτων:

1η ΜΟΡΦΗ:

$$\boxed{\int f(ax+\beta)dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+\beta)+c}$$

όπου F(x) παράγουσα της f

Εφαρμογές:

1. $\int \eta\mu(2x+6)dx$ 2. $\int e^{-5x}dx$ 3. $\int \frac{2}{4x-3}dx$ 4. $\int \frac{x+5}{x+2}dx$ 5. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}dx$

2η ΜΟΡΦΗ:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c}$$

Εφαρμογές:

1. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+2}dx$ 2. $\int \frac{x}{x^2+4}dx$ 3. $\int \varepsilon\phi x dx$

3η ΜΟΡΦΗ:

$$\boxed{\int f^a(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1}+c, a\neq -1}$$

Εφαρμογές:

1. $\int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x dx$ 2. $\int \frac{e^x}{(e^x+2)^3}dx$ 3. $\int x(x^2+1)^7 dx$

ΣΧΟΛΙΟ: Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να τυποποιήσουμε όλα τα βασικά ολοκληρώματα.

4η ΜΟΡΦΗ:

$$\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x)+c$$

&

$$\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)}+c$$

<u>Εφαρμογές</u>:

1. $\int(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx$ 2. $\int\left(2x^2e^{x^2}+e^{x^2}\right)dx$ 3. $\int \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$ 4. $\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int x\sqrt{x+2}dx$
2. $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$
3. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, αντικατάσταση: x = ημθ, -π/2 < θ < π/2, θ ≠ 0
4. $\int \eta\mu^3\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta$, αντικατάσταση: t = συνθ
5. $\int \frac{\ln x}{x}dx$
6. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+5}}dx$
7. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}dx$
8. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$
9. $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\eta\mu x}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}dx$
11. $\int \frac{1+\ln x}{x(2+\ln x)}dx$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο [α,β] με συνεχή παράγωγο, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx$$

Είναι φανερό ότι ο παραπάνω τύπος θα εφαρμόζεται όταν έχουμε γινόμενο συναρτήσεων $f\cdot g$. Για να εφαρμόσουμε όμως τον τύπο πρέπει να αντικαταστήσουμε τη μία από τις δύο (την κατάλληλη κατά περίπτωση) με την παράγωγο της παράγουσάς της (δηλαδή με την παράγωγο του αόριστου ολοκληρώματός της).

Παραδείγματα:

1. $\int_0^1 xe^x\,dx \xrightarrow{e^x=(e^x)'} \int_0^1 x(e^x)'\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = \cdots = 1$

2. $\int_0^{\pi/2} x\eta\mu x dx \xrightarrow{\eta\mu x=(-\sigma\upsilon\nu x)'} \int_0^{\pi/2} x\,(-\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\int_0^{\pi/2} x\,(\sigma\upsilon\nu x)'dx =$
$-\left([x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(x)'\sigma\upsilon\nu x dx\right) = -[x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x dx =$
$-[x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2} + [\eta\mu x]_o^{\pi/2} = \cdots = 1$

3. $\int_1^e lnx dx \xrightarrow{1=(x)'} \int_1^e (x)'lnx dx = [xlnx]_1^e - \int_1^e x\,(lnx)'dx = [xlnx]_1^e - \int_1^e x\cdot {}^1/_x\ dx =$
$[xlnx]_1^e - \int_1^e 1dx = [xlnx]_1^e - [x]_1^e = elne - 0 - e + 1 = 1$

4. $I = \int e^x \eta\mu x dx \overset{e^x=(e^x)'}{=} \int (e^x)'\eta\mu x dx = e^x\eta\mu x - \int e^x(\eta\mu x)'dx = e^x\eta\mu x -$
$\int e^x\sigma\upsilon\nu x dx \overset{e^x=(e^x)'}{=} e^x\eta\mu x - \int (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx = e^x\eta\mu x - \left(e^x\sigma\upsilon\nu x - \int e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx\right) =$
$e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x - \int e^x\eta\mu x dx = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) - I$
Επομένως $2I = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$ και τελικά $I = \frac{e^x}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c$

- Παρατήρηση 1: (3 μεθοδεύσεις ασκήσεων)
- Παρατήρηση 2: (Γινόμενο περισσότερων των δύο όρων)
  Παράδειγμα: $I = \int xe^x\eta\mu x dx$

Έστω $H(x) = \int e^x\eta\mu x dx \overset{(4)}{=} \frac{e^x}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$ μια αρχική συνάρτηση της $f(x) = e^x\eta\mu x$

Δηλαδή $H'(x) = e^x\eta\mu x$ και έχουμε $I = \int x(e^x\eta\mu x)dx = \int xH'(x)dx =$

$xH(x) - \int (x)'H(x)dx = xH(x) - \int H(x)dx = \frac{xe^x}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) - \int \frac{e^x}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)dx = \cdots$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι της μορφής του ($4^{ου}$) παραδείγματος.

5. $\int x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$
(συνδυασμός τύπων αποτετραγωνισμού και ολοκλήρωσης κατά παράγοντες)

6. $\int x^3 e^{x^2} dx$
(συνδυασμός αντικατάστασης και ολοκλήρωσης κατά παράγοντες)

ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

7. $\int x\varepsilon\varphi^2 x dx$ Υπόδειξη: τύποι αποτετραγωνισμού

8. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

9. $\int \frac{x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} dx$

10. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

11. $\int \ln^2 x dx$

12. Αν $I_\nu = \int x^\nu e^x dx, \quad \nu \geq 1$ να δειχθεί ότι $I_\nu = x^\nu e^x - \nu I_{\nu-1}$ και στη συνέχεια να υπολογισθεί το $\int x^3 e^x dx$.

13. $\int \frac{\eta\mu x}{e^x} dx$,

14. $\int 2^x \eta\mu \frac{x}{2} dx$,

15. $\int \frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$,

16. $\int_1^{e^\pi} \eta\mu(\ln x) dx$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αρχικά θα υπενθυμίσουμε πως υπολογίζονται κάποιες απλές μορφές, χρησιμοποιώντας κάποια παραδείγματα:

1. $\int \frac{\mathrm{A}}{ax+\beta}dx = \mathrm{A}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+\beta| + c$
2. $\int \frac{\mathrm{A}}{(ax+\beta)^k}dx = \mathrm{A}\int (ax+\beta)^{-k}dx = \mathrm{A}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+\beta)^{-k+1}}{-k+1} + c$
3. $\int \frac{x+3}{x+1}dx = \cdots = x + 2\ln|x+1| + c$
4. $\int \frac{x^3+27}{x+3}dx = \cdots$
5. $\int \frac{x^3-2x+1}{x}dx = \cdots$
6. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x}dx = \cdots$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με δύο βασικές μορφές:

<u>1^{η} ΜΟΡΦΗ:</u> « ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή »
Εφαρμογή: $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

<u>2^{η} ΜΟΡΦΗ</u>: « ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του παρονομαστή »
Εφαρμογή: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. $\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2}dx$
2. $\int \frac{x^5-x+3}{x^2-1}dx$
3. $\int \frac{1}{x^2+2x}dx$
4. $\int \frac{2x^2-5x+5}{x^2-3x+2}dx$
5. $\int \frac{2x-1}{x^3-2x^2-5x+6}dx$
6. $\int \frac{x^3-17x+31}{x^2-5x+6}dx$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α. «Τύποι αποτετραγωνισμού»

1. $ημ^2x = \frac{1-συν2x}{2}$
2. $συν^2x = \frac{1+συν2x}{2}$
3. $εφ^2x = \frac{1}{συν^2x} - 1$
4. $σφ^2x = \frac{1}{ημ^2x} - 1$

Β. «Τύποι από γινόμενο σε άθροισμα»

1. $2ημxσυνx = ημ2x$
2. * $2ημxσυνy = ημ(x-y) + ημ(x+y)$
3. * $2συνxσυνy = συν(x-y) + συν(x+y)$
4. * $2ημxημy = συν(x-y) - συν(x+y)$

* θα δίδονται

Ακολουθούν λυμένα παραδείγματα:

1. $\int ημxdx = -συνx + c$
2. $\int συνxdx = ημx + c$
3. $\int εφxdx = \int \frac{ημx}{συνx}dx = -\int \frac{(συνx)'}{συνx}dx = -\ln|συνx| + c$
4. $\int σφxdx = \cdots$
5. $\int ημ^2xdx \overset{(A)}{=} \int \frac{1-συν2x}{2}dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}συν2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int συν2xdx = \frac{1}{2}x -$

   $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ημ2x + c$
6. $\int συν^2xdx = \cdots$
7. $\int εφ^2xdx \overset{(A)}{=} \int\left(\frac{1}{συν^2x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{συν^2x}dx - \int dx = εφx - x + c$
8. $\int σφ^2xdx = \cdots$
9. $\int ημ^3xdx = \int ημ^2x \cdot ημxdx = \int(1-συν^2x)ημxdx = \int ημxdx - \int συν^2x \cdot ημxdx =$

   $\int ημxdx + \int συν^2x(συνx)'dx = -συνx + \frac{συν^3x}{3} + c$
10. $\int συν^3xdx = \cdots$

11. $\int εφ^3xdx = \int εφ^2x \cdot εφxdx = \int\left(\frac{1}{συν^2x} - 1\right)εφxdx = \int \frac{1}{συν^2x} \cdot εφxdx -$

$- \int εφxdx = \int εφx \cdot (εφx)'dx - \int εφxdx = \frac{εφ^2x}{2} + \ln|συνx| + c$

(βλέπε άσκηση 3)

12. $\int σφ^3xdx = \cdots$

13. $\int ημ^4xdx = \int ημ^2x \cdot ημ^2xdx = \int \frac{1-συν2x}{2} \cdot \frac{1-συν2x}{2}dx =$

$\frac{1}{4}\int (1-συν2x)^2dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2συν2x+συν^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx -$

$-\frac{1}{2}\int συν2xdx + \frac{1}{4}\int \frac{1+συν4x}{2}dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int συν2xdx + \frac{1}{8}$

$\int (1+συν4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ημ2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}ημ4x + c$

14. $\int συν^4xdx = \cdots$

15. $\int εφ^4xdx = \int εφ^2x \cdot εφ^2xdx = \int εφ^2x\left(\frac{1}{συν^2x} - 1\right)dx = \int εφ^2x \cdot \frac{1}{συν^2x}dx -$

$- \int εφ^2xdx = \int εφ^2x(εφx)'dx - \int εφ^2xdx = \frac{εφ^3x}{3} - (εφx - x) + c$

(βλπ άσκηση 7)

16. $\int σφ^4xdx = \cdots$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:</u>

17. $\int ημxσυνxdx$, $\int συν3θσυνθdθ$, $\int ημ5xημxdx$

18. $\int \frac{1+ημ^2x}{συν^2x}dx$

19. $\int συν^2x \cdot ημ3xdx$

20. Αν $π < x < 2π$, να βρεθεί το $I = \int \sqrt{1+συνx}dx$

21. $\int \sqrt{1-ημ2x}dx$

22. $\int ημ^νθ \cdot συν^3θdθ$ (Απάντηση: $\frac{ημ^{ν+1}θ}{ν+1} - \frac{ημ^{ν+3}θ}{ν+3} + c$)

23. $\int\left(συν^{32}xημ^{30}x - ημ^{32}xσυν^{30}x\right)dx$ (Απάντηση: $\frac{1}{2^{31}} \cdot \frac{ημ^{31}2x}{31} + c$)

24. $\int \frac{xσυν^2x}{1-συν2x}dx$ (Απάντηση: $-\frac{1}{2}xσφx + \frac{1}{2}\ln|ημx| - \frac{x^2}{4} + c$)

25. $I_1 = \int ημ^3 x συν^2 x dx$ (θέτω t = συνx)

$I_2 = \int ημ^2 x συν^3 x dx$ (θέτω t = ημx)

$I_3 = \int ημ^2 x συν^4 x dx$

26. Να δειχτεί ότι: $\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+ημx}{1+συνx} \cdot e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}}$

(Υπόδειξη: $\frac{1+ημx}{1+συνx} = \frac{1}{2συν^2 \frac{x}{2}} + εφ\frac{x}{2}$)

27. Αν $I_ν = \int_o^{\frac{\pi}{4}} εφ^ν x dx$, $ν \in N^*$, να δείξετε ότι για κάθε $ν \geq 3$ ισχύει:

$I_ν = \frac{1}{ν-1} - I_{ν-2}$ (θέμα εξετάσεων)

ΕΝΟΤΗΤΑ 13η:
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ι) Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού λογισμού:

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha).$$

Εφαρμογές:

1. i) $\int_1^e x\ln x dx$

   ii) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

   iii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^2 x dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}$

3. Βρείτε το $\int_1^{\nu} \frac{1}{x(x+1)}dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$.

4. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στο R, για την οποία υπάρχει και είναι συνεχής η δεύτερη παράγωγος. Αν $f(\pi) = 4$ και $I = \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\eta\mu x dx = 6$, να βρείτε το $f(0)$

   (Απάντηση: 2)

5. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

   $f(0) = 2002$, $f'(0) = 1$ και $1 + \int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t dt$

   (Απάντηση: f(x) = ημx + 2002)

6. Αν $\alpha > 1$ και $\int_1^{\alpha} \frac{x^4 - 1}{x^3}dx = \frac{9}{8}$ να υπολογιστεί το α.

ΙΙ) Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος:

1. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$, όταν $\alpha > \beta$
3. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
4. Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$
5. Αν f,g συνεχείς στο [α,β] και $\lambda, \mu \in R$ έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
6. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

<u>Εφαρμογές</u>:

1) $\int_{-2}^{4}(x^2-5x+1)dx+\int_{-2}^{4}(2x^2+5x-1)dx=\cdots$

2) $\int_{0}^{2}|x-1|dx=\ldots$

3) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(\alpha+\beta-x)dx$

4) Αν $\int_{1}^{5}f(x)dx=-1$ και $\int_{3}^{5}f(x)dx=3$, να βρείτε:

i) $\int_{1}^{3}f(x)dx$ ii) $\int_{-3}^{-5}f(-x)dx$

5) Αν η f είναι άρτια συνάρτηση, να αποδειχτούν:

i) $\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$

6) Αν η f είναι περιττή συνάρτηση, να αποδειχτούν:

i) $\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$

7) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x=-t$ να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $A=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx$ είναι ίσο με το ολοκλήρωμα $B=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$. Στη συνέχεια να υπολογισθεί το Α + Β και το Α

(Απάντηση: 2/3 και 1/3)

8) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t=\kappa-x$ να δείξετε ότι το $A=\int_{0}^{K}\frac{f(k-x)}{f(x)+f(k-x)}dx$ είναι ίσο με το $B=\int_{0}^{K}\frac{f(x)}{f(x)+f(k-x)}dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε

i) το Α+Β και να δείξετε ότι Β = κ/2

ii) το $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}dx$ (Απάντηση: Α+Β = κ και π/4)

9. Για μια συνάρτηση f, ισχύει ότι f(2α –x) = – f (x), $x\in R$.

Να αποδείξετε ότι $\int_{0}^{2\alpha}f(x)dx=0$ και να βρείτε το $I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\eta\mu\theta(2+\eta\mu^4\theta)}{(3+\eta\mu^2\theta)(5+12\sigma\upsilon\nu^3\theta+17\sigma\upsilon\nu^6\theta)}d\theta$

10. Με την αντικατάσταση $u=\pi-x$ να δείξετε ότι:

$\int_{0}^{\pi}xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\eta\mu x)dx$

11. Δίνεται συνάρτηση με $f(x)=\begin{cases}3x^2+\beta, x<1\\ 2\alpha x+1, x\geq 1\end{cases}$

Βρείτε α, β $\in$ R έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο 1 και $\int_{0}^{2}f(x)dx=15$

12. Δίνεται συνάρτηση με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+εφ^2x}{εφx}, \dfrac{π}{4}<x\le\dfrac{π}{3}\\ 4ημ^2xημ2x, x\le\dfrac{π}{4}\end{cases}$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{π}{3}} f(x)dx$ (Απάντηση: $\dfrac{1+\ln 3}{2}$)

13. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{\frac{π}{2}}^{\frac{3π}{2}}\sqrt{\dfrac{1-συν2x}{2}}dx$ (Απάντηση: 2)

14. Έστω f συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα [0,π/2] και τέτοια ώστε να είναι:
$\int_0^{\frac{π}{2}}[f(x)+f''(x)]συνxdx=0$. Να δειχθεί ότι $f'(0)=f\left(\dfrac{π}{2}\right)$

15. Να δείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [0,1] έχουμε: $\int_0^{π} f(συνx)dx=\int_{-\frac{π}{2}}^{\frac{π}{2}} f(ημx)dx$

(Υπόδειξη: θέτω $χ=π/2-t$)

16. Αν f συνεχής συνάρτηση στο R και α, β, γ, δ $\in$ R να δείξετε ότι:
$\int_α^β[f(x+γ)-f(x+δ)]dx=\int_γ^δ[f(x+α)-f(x+β)]dx$

ΕΝΟΤΗΤΑ 14η:

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ: $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

1. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\left(\int_{2}^{x} t\cdot e^{2t+1}dt\right)^{3}$ ii) $f(x)=\int_{x^4}^{10}\frac{t^2-t-6}{2t}dt,\ x>0$

   iii) $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\ln t^2dt,\ x>0$ iv) $f(x)=x^2\int_{1}^{x}t^3dt,$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{1}^{x}(2t+3)dt$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $x_o=2$

3. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{1-\ln t}{t}dt,\ x>0$

4. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\int_{0}^{x}(\alpha\sigma\upsilon\nu\pi t+\beta\eta\mu\pi t)dt$. Να βρεθούν οι α, β $\in$ R, ώστε $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{\pi}$ και

   $f'(2)=2$

5. Να υπολογισθούν τα όρια:

   α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_{1}^{x}e^{2t+1}dt}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_{0}^{x}2\eta\mu^2 3tdt}{\int_{0}^{x}e^{2t}dt}$

6. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{1-\ln t}{t^2}dt,$ στο διάστημα [1,e]

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε α, β, x $\in$ Δ ισχύουν: $F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt$ και $G(x)=\int_{\beta}^{x}f(t)dt$, να δείξετε ότι η συνάρτηση F - G είναι σταθερή στο Δ

8. Βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση f, αν για κάθε $x\in R$ ισχύει: $\int_{0}^{x}f(t)dt=[f(x)]^2$

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $\int_{0}^{x^2}f(t)dt=x\cdot\eta\mu(\pi x)$,
   να βρείτε την τιμή f (4)

10. Να βρείτε συνάρτηση f, συνεχή στο [0,π/2] για την οποία ισχύει $2\int_{\alpha}^{x}f(t)dt=2\eta\mu x-1$, $\alpha\in[0,\pi/2]$.
    Ποια πρέπει να είναι η τιμή του α;

11. Να βρεθεί συνάρτηση f, με $f(x)\neq0$, παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού το $(3/2,+\infty)$ όταν:
    $f(x)=2+\int_{1}^{x}f^2(t)dt$

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x\in[0,\pi/2)$ ισχύει $\int_{0}^{\eta\mu x}f(t)dt=\sqrt{3}x^2+1$, βρείτε το f (1/2)

13. Να δείξετε ότι η τιμή του $\int_{-\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, $x\in(0,\pi/2)$ είναι ανεξάρτητη του x.

ΕΝΟΤΗΤΑ 15η:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1) ι) Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, τέτοια ώστε:
$f'(x)\cdot x - f(x) > 0$ & $f(1)=2$. Να δείξετε ότι: $\int_a^\beta f(x)dx \geq \beta^2 - a^2$, $a,\beta \in [1,+\infty), a<\beta$.
ιι) Να δείξετε ότι: $\int_a^\beta f(x)dx < \dfrac{\beta\cdot f(\beta) - a\cdot f(a)}{2}$.

2) Δίνεται συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,1], με συνεχή δεύτερη παράγωγο, έτσι ώστε:
$f(x+1) - f(x) = \dfrac{x^2}{2}, x\in[0,1]$
ι) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: f ΄΄(ξ) = 0
ιι) Να δείξετε ότι: $\int_0^1 (x-1998)f''(x)dx = f'(0)$.

3) Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,π], με f ΄΄ συνεχή και f ΄(χ)>0 στο [0,π], έτσι ώστε:
$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\cdot \eta\mu x dx = 0$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης G,με
G(χ) = (π-χ) f (χ+π) + χ f (π-χ), $\chi\in R$ τέμνει τον χ΄χ σε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,\pi)$.

4) Έστω συνάρτηση f : $[1,+\infty)\to R$ με f (x) $= \int_1^x \dfrac{1}{1+\ln t}dt$. Να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{1+\ln 2} < f(2) - f(1) < 1$.

5) ι) Να δείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει: $\ln x \leq x-1$
ιι) Έστω f συνεχής στο $(0,+\infty)$ τέτοια ώστε: $f(x) \geq x-1, x>0$
Να λύσετε την εξίσωση: $x\cdot \ln x - x + 1 = \int_1^x f(t)dt, x>0$.

6) Να δείξετε ότι:
ι) Για κάθε χ>0 ισχύει ότι $2xe^x + e^x - 1 > 0$
ιι) $\int_1^{2001} e^x(2x+1)dx > 2.000$
ιιι) $\int_2^3 \dfrac{e^x}{1-x}dx < \int_2^3 \dfrac{e^x - 1}{x}dx$.

7) Έστω f : $R\to R$, με $f(x) = a\cdot x^3 + \beta\cdot x^2 + \gamma\cdot x, a>0$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο για χ = 1 και έχει θέση σημείου καμπής για χ = 2.
ι) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
ιι) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, αν είναι γνωστό ότι: το Εμβαδό που περικλείεται από την C_f και τον χ΄χ, είναι 27 τ.μ.

8) Έστω f συνεχής, με f (-x) = - f (x), $x\in R$
ι) Να δείξετε ότι: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0, a>0$
ιι) Να δείξετε ότι η συνάρτηση F, με $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x\in R$ είναι άρτια.

9) Να δείξετε ότι: $\int_0^x e^{\eta\mu t}dt \geq e^{\eta\mu x} - 1, x \in [0,+\infty)$.

10) Έστω συνάρτηση h, με $h(x) = f(x^2) + \int_a^x f(t)dt, x \in R,$ όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, με $f(0) \neq 0$ & $f'(0) = 0.$ Έστω ακόμη η συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{f(x)}, x \in R.$
Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_h, C_g, στο σημείο με $x_0 = 0$, τέμνονται κάθετα.

11) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R, τέτοια ώστε $\int_1^2 f(t)dt = 1.998$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, έτσι ώστε $f(\xi) = 2.005 - 3\xi^2$.

12) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, με συνεχή πρώτη παράγωγο και f (π/2) = 1.
Να δείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \eta\mu^2 x[f'(x) + f(x) \cdot \sigma\varphi x]dx = \dfrac{1}{2}$.

13) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, τέτοια ώστε: $\int_0^{\eta\mu x} f(t)dt + \int_{x+1}^0 f(t)dt = 1.998, x \in R$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1): \ f'(x_0) = 0.$

14) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R.Αν το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από « τη C_f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=α, χ=β, όπου 0<α<β », είναι $E = \dfrac{3}{2(\beta^2+1)} - \dfrac{3}{2(a^2+1)}$, τότε να βρεθεί ο τύπος της f και να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

15) Έστω συνάρτηση f, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο [0,1] και $f(1) = \sqrt{2}$ & $f(0) = 0.$ Να δείξετε ότι:
$\int_0^1 e^{2x} f(x) \cdot [f(x) + f'(x)]dx = e^2.$

16) Έστω συνάρτηση g, με $g(x) = 2x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right), x > 0$, όπου f παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο, τέτοια ώστε f (0)=0.
ι) Αν η ευθεία με εξίσωση ψ = 1.998 χ + κ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A (0,f (0))
ιι) Αν η ευθεία με εξίσωση ψ = 999 χ, έχει δύο κοινά σημεία με την C_g, να δείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ, τέτοιος ώστε: $\xi \cdot f\left(\dfrac{1}{\xi}\right) = f'\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$
ιιι) Αν ισχύει ότι $I = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{\beta}} \dfrac{1}{x^2} f'\left(\dfrac{1}{x}\right)dx = 0, a < \beta$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in R: \ f'(x_0) = 0.$

17) Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με f(x)>0 και 3f(x)+f ΄(x)=0 , $\forall x \in R.$
Δίδεται ακόμη η συνάρτηση F: $F(x) = \int_a^x e^{x+t} f(t)dt$
ι) Να δείξετε ότι η F είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ότι F΄΄(x)=F(x)
ιι) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in R: \ F''(x_0) = 0.$

18) ι) Να δείξετε ότι $e^x \geq x+1, \forall x \in R$

ιι) Να λυθεί η εξίσωση: $2e^x - 2 = \int_0^x f(t)dt$, όπου f συνεχής στο R με f (x) < 2 (x +1), x$\in R$

ιιι) Έστω η συνάρτηση με τύπο $g(x) = e^x, x \in R$

Να βρείτε το εμβαδόν E(t) που περικλείεται από « τη C_g, τις ευθείες χ=0, χ=t (t>0) και την ευθεία που εφάπτεται στη C_g στο σημείο A (0,1) »

ιv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{E(t)}{t^3}$.

19) Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = -\lambda x^3 + 42x^2, x > 0$ όπου λ η ρίζα της εξίσωσης:

$\int_0^1 \lambda \cdot e^{x^2+1} x dx = e^2 - e.$

Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

20) Για την ορισμένη στο R συνάρτηση f, ισχύουν: $e^x f(x) + f'(x) \cdot \left(e^x + 1.997\right) = 0, x \in R \;\&\; f(0) = 1$.

Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από « τη C_f, την ευθεία χ=1 και τους άξονες Οχ, Οψ ».

21) ι) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_a^\beta \dfrac{2\ln t}{t} dt,$ 0 < α < β

ιι) Έστω Ω = {1,2,…,ν }, ν$\in N^*$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

Αν $P(\kappa) = \displaystyle\int_{e^{\frac{1}{\kappa}}}^{e^{\frac{1}{\kappa-1}}} \frac{2\ln t}{t} dt$, όπου κ = 2,3,…,ν και $\mathrm{P}(1) = \dfrac{1}{36}$, τότε να υπολογίσετε το ν.

22) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με $x \cdot f'(x) = x^2 \cdot \int_0^1 [1 + f(t)]dt + f(x), x > 0 \;\&\; f(1) = 0$. Βρείτε τον τύπο της f (x) και το α. «Υπόδειξη: θέτουμε $\int_0^1 [1 + f(t)]dt = a$ ».

23) Έστω f συνεχής, έτσι ώστε: $2\int_2^x e^{-t} f(t)dt = e^{-4} - e^{-x} f(x), x \in R$

ι) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την f (x)

ιι) Έστω $x_1, x_2 \in \Omega$, όπου Ω δ.χ. πειράματος τύχης με $x_2 \neq 0$.Αν Α = { x_1 } με P(A) = 1-f (x_1),
B = { x_2 } με P(B) = 1-f (x_2) και $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - f(x_1 + x_2)$ με Α,Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, να δείξετε ότι P(A) = 0.

24) Έστω συνάρτηση με $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} g(t)dt + \int_0^{\frac{2}{x}} g(t)dt$, χ>0 όπου g παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Αν η F παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$, έτσι ώστε $g'(\xi) = 0$.

25) Να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \int_x^{x^2+x} \dfrac{dt}{t}, x > 0$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$.

26) Αν είναι f (0)=0 και για κάθε $x \in R^*$ ισχύει:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot f(x) + \int_0^x \left(e^{-1.998t} - 1\right)dt}{x^2} = 999$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$
και $f'(0) = 1.998$

27) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει: $\int_1^x f(t)dt \geq x^2 + \ln x - 1, x \in (0,2)$, τότε να δείξετε ότι f (1) = 3.

28) Θεωρούμε τις συνεχείς στο R συναρτήσεις f, g με f (x)>0, g (x)>0 , $x \in R$.

Έστω συνάρτηση F, με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_\beta^x g(t)dt, x \in R$

ι) Αν τα εμβαδά E_1, E_2 των δύο επίπεδων χωρίων που περικλείονται αντίστοιχα, από « τις C_f, C_g , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=α, χ=β (α<β) » είναι ίσα, να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο.

ιι) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\int_a^x f(t)dt + \int_\beta^x g(t)dt = 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (α,β).

29) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε: $\int_0^x e^t f(t)dt = e^x f(x) - \frac{x^2}{2}, x \in R$.

Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

30) ι) Έστω συνάρτηση με τύπο $g(x) = 1 - x \cdot e^{-x}, x \in R$.

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και το πρόσημό της.

ιι) Αν $f(x) = x + 2 + (x+1) \cdot e^{-x}, x \in R$, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της και να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση (ε): ψ = χ +2, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ιιι) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = (-x-2) \cdot e^{-x}$ είναι μια αρχική της $h(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$.

ιν) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ), που περικλείεται μεταξύ « της C_f, της (ε) και των ευθειών χ=0 και χ=λ (λ>0) ».

ν) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

31) Έστω συνάρτηση με τύπο $f(x) = \int_{x+1}^x \ln t dt, x > 0$

ι) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τα κοίλα στο $(0,+\infty)$

ιι) Έστω Ω = {1,2,…,ν } με ν > 0, ο δ. χ. ενός πειράματος τύχης και οι πιθανότητες:

Ρ(κ) = f ΄΄(κ) όπου κ = 2,3,…,ν . Να βρείτε το ν, αν ισχύει ότι $P(1) = \frac{\nu - 3}{\nu - 2}$.

32) Ο εξοπλισμός μιας βιοτεχνίας ρουχισμού t έτη μετά την αγορά του αξίζει:

$A(t) = \frac{c}{110} \cdot e^{10-11t}, c > 0$ (σε χιλιάδες ευρώ).

Το κέρδος K(t) από την πώληση των ειδών είναι: $K(t) = \int_0^t 0{,}1 \cdot c \cdot e^{-x^2} dx$.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή που πρέπει να πωληθεί ο εξοπλισμός, ώστε το συνολικό κέρδος που θα προκύψει από την πώληση του εξοπλισμού και του ρουχισμού που πωλήθηκε μέχρι τότε, να είναι μέγιστο.

33) Έστω συνάρτηση με τύπο $f(x) = \int_0^x \frac{a^k \ln a + \beta^k \ln \beta}{a^k + \beta^k} dk, x \in R$ και α,β >0.Αν $f(x) \geq x, \forall x \in R$, να δείξετε ότι: lnα + lnβ = 2

34) Έστω συνάρτηση με τύπο $f(x)=(a+\beta\cdot x)\cdot e^{-x}, x\in R$

ι) Να βρείτε πραγματικούς α,β, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0,1) και στο χ=0 υπάρχει κρίσιμο σημείο της f.

ιι) Έστω $E(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(t)dt, \lambda>0$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=2$.

35) Έστω f ορισμένη και συνεχής στο [α,β], με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in$[α,β].Θεωρούμε τη συνάρτηση g: [α,β]$\to R$ με τύπο $g(x)=(a-x)\cdot\int_x^a f(t)dt+(x-\beta)\cdot\int_x^{\beta} f(t)dt$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση g(x) = 0, έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα [α,β].

36) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{a\cdot x^2+2\beta\cdot x+1}{x^2+1}, x\in R$, όπου:

$$a=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\pi-2x} \quad \text{και} \quad \beta=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right]$$

ι) Να υπολογισθούν τα ακρότατα της f

ιι) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από « τη C_f και τις ευθείες ψ = 0, x = 0 και x = 2 »

37) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, ώστε $\int_0^x 2\cdot k\cdot e^{k^2} f(k)dk=e^{x^2} f(x)-\dfrac{x^3}{3}, x\in R$.

Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα σημεία καμπής της.

38) Έστω f συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(x)+\int_0^x t^2 f(t)dt=1.997, x\in R$.

ι) Να δείξετε ότι η παράσταση $e^{\frac{x^3}{3}} f(x)$ είναι σταθερή στο R.

ιι) Βρείτε την f (x) και το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t^2 f(t)dt$

39) Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to R$, έτσι ώστε $f(x)=x+\dfrac{2}{x}\cdot\int_1^x f(t)dt$, x > 0.

40) Αν η f είναι συνεχής στο [0,3] και ισχύει: $\int_2^x f(t)dt\geq x^3-\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot x)-7, x\in[0,3]$

τότε να δείξετε ότι: f (2) = 12

41) Έστω Φ, f συναρτήσεις συνεχείς στο R, έτσι ώστε:

$$\int_0^x \Phi(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^x (x-t)^2 f^2(t)dt, x\in R$$

Να δείξετε ότι η Φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο R.

42) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που εφάπτονται στη C_f, στα σημεία που αυτή τέμνει τον άξονα χ΄χ, όταν: $f(x)=\int_2^x (2t-5)dt$

43) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f, με συνεχή παράγωγο στο R, έτσι ώστε:

$$\int_0^x \left(f^2(t)+[f'(t)]^2\right)dt+1.997=f^2(x), x\in R$$

44) Έστω f συνεχής στο [α,β], ώστε: $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ & $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να δείξετε ότι:

ι) Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β]

ιι) Είναι f (x) = 0 για κάθε $x \in [a, \beta]$

ιιι) Αν ισχύει $\int_0^1 g^2(x)dx + \int_0^1 x^2 dx = 2\int_0^1 x \cdot g(x)dx$, όπου g συνεχής συνάρτηση στο [0,1], τότε να βρεθεί ο τύπος της g (x).

45) ι) Να δείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε χ > 0

ιι) Έστω f, g συνεχείς στο [α,β]. Να δείξετε ότι αν $f(x) \geq g(x), x \in$[α,β], τότε: $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$

ιιι) Να δείξετε ότι: $\int_{1.996}^{1.997} \frac{\ln(x^2+2)}{x^2+1} dx < 1$

46) Έστω συνάρτηση με $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$

ι) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ιι) Να δείξετε ότι $x^2 \geq 2 \cdot e \cdot \ln x, x > 0$

ιιι) Αν Ε (λ) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από « τη C_f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ = 1, χ = λ ,(λ > 1) », να βρεθεί το: $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

47) ι) Να αποδειχθεί ότι για μια συνάρτηση f: $R \to R$ ισχύει: $f' = f \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$, c σταθερά.

ιι) Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, τέτοια ώστε:
f (0) = 2 και $f'(x) = f(x) + \int_0^{\ln 2} f(u)du, x \in R$ (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θέσατε $\int_0^{\ln 2} f(u)du = a$)

48) Έστω f συνεχής στο R, ώστε: $\int_0^x t \cdot f(t)dt = e^{2x} + x^3 - x^2 - 2x - 1, x \in R$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

49) ι) Να δείξετε ότι: $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta F(a + \beta - x)dx$, α < β, f συνεχής στο [α,β]

ιι) Αν g συνεχής στο [α,β] και ισχύει: f (x) + f (α + β – x) = g (x) + g (α + β – x), $x \in$[α,β] να δείξετε ότι: $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta g(x)dx$

50) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και $\int_a^\beta f(t)dt \neq 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $k \in (0,1)$ υπάρχει ένας αριθμός $c \in$(α,β), τέτοιος ώστε: $\int_a^c f(t)dt = k \cdot \int_a^\beta f(t)dt$

51) Οι πωλήσεις (σε χιλ. μονάδες) ενός προϊόντος, t έτη μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνονται από τον τύπο: $S(t) = 100 \cdot \left(1 + e^{-0,1t}\right)$, ενώ η τιμή πώλησης της μονάδας μετά από t έτη, εκτιμάται ότι θα είναι: $P(t) = \frac{3}{2} \cdot t$ (σε χιλ. ευρώ)

Να βρείτε ποια χρονιά αναμένεται να είναι η αποδοτικότερη για την εταιρεία, αν το κόστος παραγωγής είναι: $K(t) = 150 \cdot t - 60 \cdot \int_0^t e^{-0,1x} dx$ (σε εκατομ. ευρώ)

52) Δίδεται $\mathrm{I} = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$

ι) Να δείξετε ότι το $\mathrm{I} = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}dx$ και ότι Ι = α / 2

ιι) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_0^2 \frac{x^2}{2x^2-4x+4}dx$

53) Δίδεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, έτσι ώστε $f(x) = 6x + \int_0^x f(x-t)\cdot \eta\mu t dt$.
Να βρεθεί ο τύπος της.

ΕΝΟΤΗΤΑ 16η:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Δίδεται συνάρτηση f με $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ $\kappa\alpha\iota$ $f'(0)=1$.

Α. ι) να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το Σύνολο Τιμών της
ιι) να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο R
ιιι) να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα, τη x = 0.

Β. ι) να δείξετε ότι $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$
ιι) να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση
ιιι) να δείξετε ότι οι C_f , $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο Ο (0,0)

Γ. Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

2. Δίδεται f με $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $\kappa\alpha\iota$ $F(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} f(t)\,dt$, $G(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} \dfrac{f(t)}{t^2}dt$, $x>0$. Να δείξετε ότι:

Α. ι) Ισχύει $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x),\ x\neq 0$ ιι) $-\dfrac{1}{8}\leq f'(x)\leq 1$

Β. Αν 0 < α < β τότε: $f\left(\dfrac{1}{\beta}\right)-f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\leq \beta-\alpha$

Γ. Η συνάρτηση g (x) = F (x) + G (x) , x > 0 είναι η g (x) = lnx + 1

Δ. Η συνάρτηση h (x) = F(εφx) + G (σφx) είναι σταθερή στο διάστημα Δ (0, π/2).
Να βρεθεί η τιμή της.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες, ώστε: $\int_1^x f(t)dt+\int_x^1 g(t)dt=x^2-2x+1$, $x\in R$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει δύο λύσεις ρ_1,ρ_2 $\mu\varepsilon$ $\rho_1<1<\rho_2$.

Α. Να δείξετε ότι:
ι) η εξίσωση g (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2)
ιι) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2): g'(\xi)=-2$

Β. Αν η g είναι κυρτή, τότε να δείξετε ότι:
ι) η f είναι κυρτή
ιι) η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο R, το οποίο παρουσιάζεται στο x = ξ του ερωτήματος Α ιι).

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , g και του άξονα ψ΄ψ.

4. Δίδεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R \;\; \mu\varepsilon \;\; f(1)=-1, \;\; \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \;\; f'(x)e^{x+f(x)}=2x-x^2$.

ι) να βρεθεί ο τύπος , το f (A) και οι ασύμπτωτες της συνάρτησης

ιι) να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα χ΄χ και των ευθειών x = 1 , x = 4

ιιι) να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: f (x) = κ , όπου κ πραγματικός αριθμός

ιν) να λυθεί η εξίσωση: $2\ln\dfrac{2x^2-1}{x^2+8}=x^2-9$, $x>2$

5. Από το 2002 ως το 2012 τα περισσότερα από τα αρπακτικά ενός οροπεδίου θα σκοτωθούν από τους κυνηγούς. Αυτό επιτρέπει στον πληθυσμό των ελαφιών να αυξηθεί γρήγορα μέχρι να λιγοστέψει η τροφή, οπότε θα μειωθούν γρήγορα.

Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των ελαφιών είναι: $D'(t)=\dfrac{25}{2}t^3-\dfrac{5}{8}t^4, \;\; t\in[0,25] \;\; \acute{\varepsilon}\tau\eta$

ι) να βρεθεί η συνάρτηση D(t) του πληθυσμού των ελαφιών, αν το 2002 (t = 0) υπάρχουν 4000 ελάφια

ιι) ποιος ο πληθυσμός το 2012;

ιιι) πότε ο πληθυσμός θα είναι ο μέγιστος και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

ιν) να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς έτη, στα οποία ο πληθυσμός είναι 12.000

6. α) Να δείξετε ότι: $\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$, $x>0$

β) Αν $f(x)=x\cdot(1-\ln x)+\dfrac{1}{8}\ln x, \;\; x>0$ να δείξετε ότι η εξίσωση f ΄(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1 , 6/5).

γ) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

7. Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g ορισμένες σε διάστημα Δ. Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης f (x) = 0, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης: f ΄(x) + f (x)g΄(x) = 0

Β. Αν x f΄(x) – f (x) < x^2 g΄(x) για x >1 και f (1) = g (1) , να δείξετε ότι: f (x) < x g(x)

Γ. Για τη συνάρτηση f ισχύει: $\left(f'(x)-f(x)\right)(x^2+1)=2xf(x)$, $x\in R \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(0)=3$.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.

8. Α. Αν Ε είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, τις ευθείες με εξισώσεις x = 0, x = 1 και τον x΄x, να ορισθεί ο πραγματικός αριθμός α , ώστε η ευθεία x = α να χωρίζει το Ε σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Β. Αν Ε είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τις ευθείες με εξισώσεις x = 1, x = 3 και τον x΄x, να βρεθεί ευθεία με εξίσωση ψ = α που να χωρίζει το Ε σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

9. Α. Αν $\mathrm{I}_\nu = \int \eta\mu^\nu x\,dx$ *να δείξετε ότι* $\mathrm{I}_\nu = \frac{\nu-1}{\nu}\mathrm{I}_{\nu-2} - \frac{1}{\nu}\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $\nu \geq 3$

Β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και α f (x) + β f (– x) = γ, $\alpha + \beta \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{4\gamma}{\alpha+\beta}$$

10. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,e] με f (1) = 2, f (e) = e +1 και f (A) = [–1 ,4]. Να δείξετε ότι:

ι) υπάρχουν α, β στο ανοικτό διάστημα (1,e), διαφορετικά μεταξύ τους έτσι ώστε f ΄(α) = f ΄(β)=0 και ότι υπάρχει γ στο διάστημα (1,e) έτσι ώστε f ΄΄(γ) = 0

ιι) η ευθεία (ε): ψ = – x + e +2 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (1,e) και ότι υπάρχουν κ, λ στο (1,e) διαφορετικά μεταξύ τους, έτσι ώστε να ισχύει f ΄(κ) f ΄(λ) = 1

11. Α. Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 + \int_0^x f(x-t)\,dt$$

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R και η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση g με $g(x) = f(x) \cdot \int_0^x f(t)\,dt$. Να δείξετε ότι f (x) = 0 για κάθε x στο R.

12. ι) Δίνονται οι συναρτήσεις με $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 2$ *και* $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία τους.

ιι) Να βρεθούν οι x , ψ ώστε να ισχύει: $\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 2\right) \cdot e^\psi = \psi + 1$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^t + \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}\,dt,\ x \in R$

α) να δείξετε ότι f (x) = x + ημx

β) να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f

γ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της f, της αντιστρόφου της και των ευθειών με εξισώσεις x = 0 , x = π.

14. Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση f και η $g(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)\,dt,\quad x \in R,\ \alpha < \beta$

α) να βρείτε την παράγωγο της g

β) να δείξετε ότι g (α) = g (β)

γ) να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο διάστημα (α ,β), έτσι ώστε f (ξ – α) = f (ξ – β)

15. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\phi, g:(0,+\infty)\to R \quad \mu\varepsilon \quad \phi(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\ln x$$

α) να βρεθεί η μονοτονία και το πρόσημο της g

β) να δείξετε ότι $\phi'(x)=\frac{1}{2x}g(x)$ και να μελετήσετε την φ ως προς τη μονοτονία της

γ) να δείξετε ότι $\phi(x)=\phi\left(\frac{1}{x}\right),\ x>0$

δ) Δίνονται οι εξισώσεις: $\phi(x)-x=0 \quad (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad \phi(x)-\frac{1}{x}=0 \quad (2)$

Να δείξετε ότι έχουν ακριβώς μία ρίζα στα διαστήματα (0 ,1) και $[1,+\infty)$ αντίστοιχα

ε) Αν α ,β οι μοναδικές ρίζες των παραπάνω εξισώσεων, να δείξετε ότι α β = 1

16. Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\int_0^x e^{xt}dt,\ x\in R$. Να βρείτε την παράγωγο της f.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\int_1^2 t^x dt,\ x\in R$. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

17. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f έτσι ώστε: $3\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{-x} f(t)\,dt=2x^2+2x+1 \quad (1)$

Στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση που βρήκατε δεν επαληθεύει την (1).
Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε;

18. Α. Υποθέτουμε ότι ισχύει f ΄΄(x) = f (x) για κάθε x στο R.Αν στα σημεία α ,β η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta x^2 f(x)\,dx=2\left(\alpha f(\alpha)-\beta f(\beta)\right)$

Β. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με την f ΄΄ συνεχή.
Αν $f'\left(x^3+x\right)=4x,\ x\in R$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^2 x\cdot f''(x)\,dx$.

19. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R , με f ΄ συνεχή και $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$

Να δείξετε ότι $g(x)=\int_0^1 f'(xt)\,dt$

20. Α. Αν f συνεχής στο διάστημα [0 ,2] και $\int_0^2 f(x)\,dx=-2$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο διάστημα (0 ,2) τέτοιο ώστε f (ξ) = 1 – 2 ξ

Β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, έτσι ώστε για τη συνεχή συνάρτηση f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να ισχύει: $e^x+\int_0^x f(t)\,dt\ge \lambda^3 x+1,\ x\in R$

21. Α. Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , έτσι ώστε:

$$2f(x) = -f'(x) + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad x \in R$$

Β. Δίνεται συνάρτηση f, γνησίως αύξουσα, με f (0) = 0 και $\left(1+2f'(x)\right)\cdot f'\left(\dfrac{2x+4f(x)}{6}\right) = 3$.

Να δείξετε ότι f (x) = x .

Γ. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $x\cdot f'(x) > (x-1)\cdot f(x), \quad x \in R$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης ευρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x .

22. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης με τύπο:

α) $F(x) = \int_{x}^{0} \dfrac{t^2}{e^t - t} dt$,

β) $F(x) = \int_{1}^{\sqrt{x-1}} \dfrac{t^2}{\ln t - t} dt$

23. Α. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R με $\int_0^{x^2} t\cdot f(t)\,dt = x^3 \eta\mu\pi x, \quad x \geq 0$

Να δείξετε ότι f (0) + f (1) = 3 π / 2

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0 ,1], έτσι ώστε $\int_0^1 f(x)dx = e$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ρ στο διάστημα (0 ,1), έτσι ώστε: $f(\rho) = e^{\rho} + 2\rho$

24. α) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [0 ,α] ισχύει f (α – x) = f (α) – f (x) ,

να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \dfrac{\alpha\cdot f(\alpha)}{2}$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\eta\mu^{\nu} x}{\eta\mu^{\nu} x + \sigma\upsilon\nu^{\nu} x} dx$

25. Α. Να υπολογίσετε το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f^{-1}(x)$

Β. Να υπολογίσετε το Εμβαδόν του χωρίου, μεταξύ των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = 2x - x^2$ και των ευθειών x = 0 , x = 2.

Γ. Αν η συνάρτηση f είναι ΄΄1 – 1΄΄ και η f ΄ συνεχής, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x\, f'(x)dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(\psi)\,d\psi$$

26. Α. Έστω f ΄ συνεχής, f (1) = – 1 , f (5) = 11 και $f(x) \ge x^2 - 3x + 1$.
Να δείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ, τέτοιος ώστε f ΄ (ξ) = 0.

Β. Έστω f ΄ συνεχής στο διάστημα [2 ,3], με $2x \le f'(x) \le 3x^2$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x^2+x+1}{x-2} \in R$.

Να δείξετε ότι: $-2 \le f(3) \le 12$

27. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύουν:
$f(x)=\int_x^1 e^{g(t)}dt$, $g(x)=\int_x^1 e^{f(t)}dt$, $x>0$

α) να δείξετε ότι: f (x) = g (x) , x >0
β) να δείξετε ότι η $h(x)=e^{-f(x)}-x$ είναι σταθερή
γ) να δείξετε ότι: f (x) = – ln x
δ) να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu x}{x}$

28. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α ,β] με f ΄΄(x) >0
και g με $g(x)=2\int_\alpha^x f(t)\,dt-(x-\alpha)\big(f(\alpha)+f(x)\big),\ x\in[\alpha,\beta]$

α) να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία της
β) να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt<(\beta-\alpha)\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

29. Α. ι) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε (α) του χωρίου, που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^3,\ x\ge 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\psi=\alpha^3,\ \alpha\in(0,1)$ και των ευθειών x = 0 , x = 1.
ιι) να βρεθεί το α , έτσι ώστε το εμβαδόν να γίνει ελάχιστο.

Β. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=x^2$. Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Μ (0 ,1) και τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης στα σημεία $\mathrm{A}\left(\kappa,\kappa^2\right)$, $\mathrm{B}\left(\mu,\mu^2\right)$ $\mu\varepsilon$ $\kappa<0<\mu$

ι) να δείξετε ότι κ μ = – 1
ιι) να βρεθεί το εμβαδόν Ε (μ) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και των ευθειών ΟΑ , ΟΒ , όπου Ο η αρχή των αξόνων.
ιιι) να βρεθεί η ευθεία (ε), έτσι ώστε το εμβαδόν να γίνει ελάχιστο.

30. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $\ln x\le f(x)\le x-1$

α) να δείξετε ότι f ΄(1) = 1
β) να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\int_1^x f(t)\,dt+x^2+1-2e^{x-1}}{(x-1)^2}$
γ) να δείξετε ότι η εξίσωση $2+2\int_1^x f(t)\,dt=2\ln x+x^2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (1 ,e)

31. Α. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $\int_{\alpha+x}^{\beta+x} f(t)\,dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο διάστημα (α ,β), έτσι ώστε f ΄(ξ) = 0

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α ,β] με $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \beta - \alpha$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : \int_{\alpha}^{x_0} f(t)\,dt = \beta - x_0$

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta) : f(\xi_1)\, f(\xi_2) = 1$

32. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R , της οποίας υπάρχει η f ΄΄ στο R* , έτσι ώστε

f (0) = 0 , $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)\eta\mu x}{x^2} = 1$ και για κάθε $x \neq 0$ *ισχύει* $x \cdot f''(x) > 0$.

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων.

33. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0 ,4] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0 ,4).

Αν ισχύει ότι f (1) = f (2) = 0 και f (3) = 1, να δείξετε ότι:

α) υπάρχει α στο διάστημα (0, 4): f ΄ (α) = 1/2

β) υπάρχει β στο διάστημα (0 ,4): f ΄΄ (β) > 1/2

34. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g συνεχείς στο διάστημα [α ,β], παραγωγίσιμες στο (α ,β) ώστε

f (α) – g (α) = 2 και f (β) – g (β) = 0 .

Επιπλέον υπάρχει γ στο διάστημα (α ,β) με f (γ) – g (γ) = –1

Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει ξ στο διάστημα (α ,β) έτσι ώστε f (ξ) = g (ξ)

β) υπάρχει κ στο διάστημα (α ,β) έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f , g να έχουν παράλληλες εφαπτόμενες στα σημεία Α (κ, f (κ)) , Β (κ, g (κ)).

35. Α. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής

β) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \dfrac{1}{e}$

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής με $\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \dfrac{x}{2}\big(f(x) + \kappa\big),\ x \in R$. Να δείξετε ότι:

α) f (0) = κ

β) $f(x) = \begin{cases} c_1 x + \kappa, & x > 0 \\ c_2 x + \kappa, & x \leq 0 \end{cases}$

36. Α. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα [α ,β], για την οποία ισχύουν:

$$f^2(\alpha)+f^2(\beta)=2f(\alpha)f(\beta) \quad \kappa\alpha\iota \quad [f'(\alpha)]^2+[f'(\beta)]^2=0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση f ΄΄(x) = 0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο [α ,β]

Β. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\int_0^x e^x f(x-t)\,dt$

α) Να βρεθεί η f ΄

β) Αν f (x) > 0 και f (e) = e , να δείξετε ότι: $\ln\big(f(x)\big)=e^x+x+1-e^e-e$

37. Α. Δίνεται η παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ $\mu\varepsilon$ $f(0)=0$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$, x > 0 είναι κυρτή.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0 ,π] , για την οποία ισχύουν:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=2 \quad \kappa\alpha\iota \quad 3+\sigma\upsilon\nu 3x-2x\eta\mu 3x\ge\int_0^x f(t)\,dt$$

Να βρεθεί η τιμή f (π / 3)

38. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $\int_{-3}^{-1} f(x)2^{x+3}\ln 2\,dx=f(x)-2^{-x-2},\quad x\in R$

α) να βρεθεί ο τύπος της f (x)

β) να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της, ευρίσκεται “ κάτω ” από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

39. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{x\ln x}{1+x^2},\ x>0$

α) να δείξετε ότι $F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x,\quad x>0$

β) αν $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt,\ \alpha>1$ να δείξετε ότι η F διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε α > 0

40. Α. Δίνεται η συνεχής, στο διάστημα [α ,3] , συνάρτηση f με λ f (x) + ν f (α +3 – x) = μ , $\lambda\ne\pm\nu$

α) να δείξετε ότι f (α) = f (3)

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_\alpha^3 f(x)\,dx$

Β. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(\alpha+\beta,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=\alpha\beta+2\beta$, 0 < α < β

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x-\int_\alpha^x f(t)\,dt=-\beta$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (α ,β)

41. Α. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f'(0)=1, \quad e\cdot\int_0^1 f(t)\,dt=1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \int_0^x f(t)\,dt \ge xe^{-x}, \ \ x\in R$$

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο διάστημα (0 ,1), έτσι ώστε $f''(\xi)=3e^{-\xi}-\xi e^{-\xi}$

Β. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , ώστε $\int_0^{\alpha} f(t)\,dt\cdot\int_0^{\beta} f(t)\,dt<0$ με 0 < α < β

Να δείξετε ότι υπάρχουν γ στο διάστημα (α ,β) και ξ στο (0 ,γ), έτσι ώστε f (ξ) = 0

42. Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g συνεχείς στο διάστημα [α ,β] , με f (α) = g (α) , f (β) = g (β) και f (x) < g (x) για κάθε x στο διάστημα (α ,β).
Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία (ε): x = κ , όπου κ ανήκει στο διάστημα (α ,β), η οποία χωρίζει το χωρίο Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R \ \ \mu\varepsilon \ \ f(\alpha)=f(\beta), \ \ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0$

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο διάστημα (α ,β), ώστε f (ξ) = f ΄ (ξ)

43. Α. Δίνεται η f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R , για την οποία ισχύει:

$$2f^3(x)+3f(x)-e^x=0, \ \ x\in R$$

Να δείξετε ότι: α) η f είναι γνησίως αύξουσα , β) $f^{-1}(x)=\ln\left(2x^3+3x\right)$

Β. Δίνεται η f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για κάθε x > 0.Έστω ότι η f έχει τρία κοινά σημεία με την ευθεία ψ = x.
Να δείξετε ότι η εξίσωση f (x) = x f ΄(x) έχει δύο τουλάχιστον θετικές ρίζες.

44. Δίνεται η συνάρτηση f με $e^x-e^{f(x)}=e^{x+f(x)}, \ \ x\in R$

α) να δείξετε ότι $f(x)=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$,

β) να βρεθεί το Σύνολο Τιμών της f,

γ) να δείξετε ότι $\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|<\left|\alpha-\beta\right|, \ \ \alpha\ne\beta$,

δ) να δείξετε ότι $\int_0^1 e^{f(x)-x}\,dx=\ln\dfrac{2e}{e+1}$

45. Α. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [3 ,4] , με συνεχή παράγωγο και f (3) = 3, f (4) = 4 , f ΄(x) > 0. Να δείξετε ότι: $\int_3^4 f(x)\,dx+\int_{f(3)}^{f(4)} f^{-1}(x)\,dx=7$

Β. Να βρεθεί f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, με $f(x)=2x^3+\int_0^x e^{-u}f(x-u)\,du$

46. Δίνεται συνάρτηση f , ορισμένη στο R , δύο φορές παραγωγίσιμη με f ΄΄(x) < 0 για κάθε x στο R και f (0) = f (1) = 0. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει ένα ακριβώς ξ στο R έτσι ώστε f ΄(ξ) = 0

β) η f στο ξ του προηγούμενου ερωτήματος, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

γ) η εξίσωση $f(x)\,f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0 ,1)

47. Δίνεται η εξίσωση (1): $9^x + 10x = \alpha,\ a \in R$ η οποία έχει ρίζα το ξ στο διάστημα (0 ,1)
α) να δείξετε ότι η (1) έχει μοναδική ρίζα το ξ
β) να βρεθεί το διάστημα στο οποίο βρίσκεται το ξ
γ) να υπολογίσετε τους αριθμούς α και ξ , αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{9^x + 10x - \alpha}{x - \xi} = 10 + 6\ln 3$

48. Α. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [0 ,1], με f ΄(0) = 0
και $f''(x)f(x) - 2\left(f'(x)\right)^2 = \lambda f^3(x),\ \lambda \in (0,1]$. Επιπλέον η συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0 ,1] , έτσι ώστε $\int_0^x g(t)\,dt = \dfrac{f(x)-1}{f(x)},\ x \in [0,1]$, $f(x) \neq 0$.
α) να βρεθεί ο λ , ώστε η συνάρτηση h με h (x) = x – g (x) να είναι σταθερή στο [0 ,1]

β) να βρεθούν οι τύποι h (x) , g (x)

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \le \eta\mu^2 x,\ \ x \ge 0$.
Να βρεθεί η τιμή f (0)

49. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty),\ \mu\varepsilon\ \ f''(x) > f'(x),\ \ x \ge 0$ και f (0) = f ΄(0) = 0. Να δείξετε ότι:

α) f ΄(x) > f (x) ,

β) η συνάρτηση με $g(x) = f(x)e^{-x},\ x \ge 0$ είναι γνησίως αύξουσα,

γ) η $f^2(x)$ είναι κυρτή

50. Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \beta\sqrt{x} + \alpha\dfrac{\ln x}{x} - 1$
α) να βρείτε τα α και β , ώστε η f να έχει ελάχιστο το f (1) = 3

β) να δείξετε ότι υπάρχει ξ > 0 , ώστε f (ξ) = 2003

γ) αν δοθεί συνάρτηση g με $g(x) = 4\sqrt{x}$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και των ευθειών με εξισώσεις x = 1 , x = e

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [1 ,2] , με τις τιμές f (1) , f (2) διαφορετικές μεταξύ τους και η συνάρτηση g με g (x) = f (3 – x).

α) να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη ξ , η οποία ανήκει στο διάστημα (1 ,2)

β) αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (1 ,2) με f ΄(x) > 0 για κάθε x στο (1 ,2) , να δείξετε ότι το ξ είναι μοναδικό. Στη συνέχεια να βρεθεί ο ξ.

51. Αν $f : R \to R$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma,$ $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$ $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt,$

να δείξετε ότι $h(x) = \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$

52. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και την $F(x) = \int_0^x x\,f(t)\,dt$

α) να βρεθεί η τιμή F΄΄(1), αν γνωρίζετε ότι f (1) = 1000 και f ΄(1) = 4

β) αν επιπλέον για κάθε x > 0 ισχύουν f ΄(x) > 0 και $\left(f^2(x)\right)' > 0$,

τότε να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx + 1000 > 0$

γ) να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες αληθεύει η ισότητα:

$$\int_0^{\kappa^3} f(t)\,dt + \kappa^3 f\left(\kappa^3\right) = \int_0^{\kappa} f(t)\,dt + \kappa\, f(\kappa)$$

53. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$

α) αν f (3) = 6 και f (5) = 10 να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο διάστημα (3 ,5), ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο Α (ξ , f (ξ)) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) να δείξετε ότι $\int_0^{\xi} x\,f''(x)\,dx = f(0)$

54. Έστω f συνεχής στο [α ,β] με f ΄(x) < 0 για κάθε x στο (α ,β). Να βρεθεί σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, της οριζόντιας ευθείας $\psi = f(x_0)$ και των ευθειών x = α και x = β , να γίνεται ελάχιστο.

55. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f , g με f (x) > 0 , g (x) > 0

α) αν τα εμβαδά των χωρίων που περικλείονται από τις γραφικές παραστάσεις τους, τον άξονα χ ΄χ και τις ευθείες x = α και x = β (α < β) είναι ίσα, τότε τα γραφήματά τους έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$

β) αν τα εμβαδά των χωρίων του προηγούμενου ερωτήματος είναι Δ , Ε αντίστοιχα και είναι διάφορα μεταξύ τους, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = g(x_0) + \delta,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ \delta = \dfrac{\Delta - \mathrm{E}}{\beta - \alpha}$

56. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R , ώστε $f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt$

α) να δικαιολογήσετε γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο R και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2,\quad x \in R$$

β) να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, του άξονα χ ΄χ και των ευθειών x = 0 και x = – 4

57. Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$, είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και έχει Σύνολο Τιμών το διάστημα $[\gamma, \delta]$.
Αν η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx = \beta\delta - \alpha\gamma$

Β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει $f^5(x) + 5f(x) = x,\ x \in R$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα

β) να βρείτε την αντίστροφη της και να υπολογίσετε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ όταν $f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = 1$

58. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f(x) > \int_0^x f(t)dt,\ x \ge 0$ να αποδείξετε ότι:

α) η $g(x) = e^{-x} \cdot \int_0^x f(t)dt,\ x \ge 0$ είναι γνησίως αύξουσα

β) $f(x) > 0$ για κάθε x στο Πεδίο Ορισμού της

59. Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g ισχύει $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt)dt + g(x) < f(x) + \int_1^x \frac{g(t)}{x}dt,\ x \ge 1$

να δείξετε ότι: α) $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt)dt = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ β) $f(x) > g(x),\ x \ge 1$

60. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R, τέτοια ώστε $[f'(x) - f(x)](x^2+1) = 2x f(x),\ x \in R$
της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο σημείο $A(0, f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία με εξίσωση (ε): $\psi = -x + \beta$

α) να αποδείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x) = (x^2+1)e^x,\ x \in R$

β) να αποδείξετε ότι δεν μπορεί η ευθεία (ε) να έχει με τη γραφική παράσταση της f δύο κοινά σημεία

γ) θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(t) = \int_0^t f(x)dx,\ t > 0$. Βρείτε το $\lim_{t \to +\infty} \frac{g'(t)}{e^{2t}}$

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \alpha$ ($\alpha > 0$)

61. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f που ικανοποιεί την ισότητα: $\int_0^x (1+t)f(t)dt = x^2 + 6x,\ x \ge 0$

α) να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{2x+6}{x+1},\ x \ge 0$

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$

γ) να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f, στο διάστημα $[1, 3]$

δ) να αποδείξετε ότι: $9e < \int_1^3 e^t f(t)dt < 32e$

62. Έστω συνεχής συνάρτηση f, τέτοια ώστε $2\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - (\ln x)^2 + 2002$, $x > 0$.
Να αποδείξετε ότι:

α) ο τύπος της f είναι $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

β) η f παρουσιάζει ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο με τετμημένη x = 1, του οποίου να βρείτε το είδος

γ) ισχύει ότι $x^{\frac{1}{1+x}} \geq e^{1-x}$, $x \geq 1$

δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα χ ΄χ και τις ευθείες x = 1 και x = e , είναι $E = \frac{e^2}{2} - 1$

63. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f με $f(x) > x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(xt)\,dt$, $x \geq 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $H(x) = e^{-x}\int_1^x f(t)\,dt$, $x \geq 1$ είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια ότι f (x) > 0

β) οι εξισώσεις $\eta\mu^2(2002x)\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right) + f(x)\left(\sigma\upsilon\nu 2002x + 1\right) = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu 2002x + 1 = 0$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

64. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0 ,1] , με f (x) > 0 και f ΄(x) < –1 για κάθε x στο διάστημα [0 ,1].
Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \cdot \int_\gamma^x f(t)\,dt + \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx \cdot \int_x^\beta f(t)\,dt$, $x \in [0,1]$ με

0 < α < β < γ < 1 , ώστε $\int_\beta^\gamma f(x)\,dx = 1$.

Να αποδείξετε ότι: α) $F(x) = -\int_\alpha^x f(t)\,dt$, $\beta)$ $F(x) < \frac{f^2(x)}{2}$

65. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $x \in R$

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημό της

β) να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $x \in (0, +\infty)$

γ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα χ ΄χ και τις ευθείες x = 0 , x = 1

66. Θεωρούμε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R , έτσι ώστε $\int_x^{x^3} f(t)\,dt \leq x^3 - x$, $x \in R$

α) να αποδείξετε ότι f (–1) = f (0) = f (1)

β) να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$, ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f σε αυτά, να είναι παράλληλες στον άξονα χ ΄χ

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο (–1,1) έτσι ώστε f ΄΄(ξ) = 0

δ) μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο A (ξ, f (ξ)) ;

67. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, \alpha] \to R$, $\alpha > 0$, τέτοιες ώστε να ισχύει κ f (x) + λ f (α – x) = g (x) με κ , λ > 0 και διαφορετικά μεταξύ τους.
Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο [0 ,α] ,

β) $(\kappa+\lambda)\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} g(x)\,dx$,

γ) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}}\,dx = \frac{1}{2}$

68. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα Δ = [0 ,1] , ώστε για κάθε x στο Δ να ισχύει ότι $\int_x^1 f(t)\,dt \ge \frac{1-x^2}{2}$. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) $F(1) = \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx$ και

β) $\int_0^1 x f(x)\,dx \ge \frac{1}{3}$, γ) $\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx \ge \frac{1}{3}$

69. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to R$ με $g(x) \ne 0$ και $f(\alpha) = f(\beta)$.
Αν $f(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{f^3(t)}{g^2(t)}\,dt$, $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι f (x) = 0 για κάθε x στο [α ,β]

70. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx \quad \text{όπου } \beta - \alpha = \delta - \gamma > 0 \text{ και } \beta < \gamma$$

Α. α) Αν $\phi(\chi) = \int_x^{x+\beta-\alpha} f(t)\,dt$, $x \in R$, να αποδείξετε ότι μεταξύ των α και γ υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0, ώστε $\phi'(x_0) = 0$

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση f ΄ (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(x_0, x_0+\beta-\alpha\right)$

Β. Αν $\int_{2004}^{2006} f(x)\,dx = \int_{24}^{26} f(x)\,dx$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R , να αποδείξετε ότι η εξίσωση f ΄ (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (24 , 2004)

71. Δίνεται συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα [0 ,1] , ώστε f (0) = 0 , η f ΄ είναι συνεχής και για κάθε x > 0 είναι $f(x) > \frac{f'(x)}{2} > 0$

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2\int_0^x \nu\, f^{\nu}(t)\,dt - f^{\nu}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

β) να αποδείξετε ότι $\nu\left(\int_0^x f^{\nu}(t)\,dt\right)^2 \ge \int_0^x f^{2\nu}(t)\,dt$

γ) αν η f είναι πολυωνυμική, να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα στο προηγούμενο ερώτημα

72. Αν $P(t)=\alpha_\nu t^\nu+\alpha_{\nu-1}t^{\nu-1}+...+\alpha_1 t+\alpha_0 \quad \kappa\alpha\iota \quad Q(t)=\beta_\kappa t^\kappa+\beta_{\kappa-1}t^{\kappa-1}+...+\beta_1 t+\beta_0 \quad \mu\varepsilon \quad a_i,\beta_i$ ακέραιους συντελεστές και ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 \frac{P(xt)\cdot Q(xt)}{x}dt=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x Q(t)}{x}dt=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma>2$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha_0=0$, $\beta_0=6 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha_1=1$

β) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 P\left(x^2 t\right)dt$

73. Θεωρούμε μία συνάρτηση f συνεχή και γνησίως αύξουσα στο [α ,β] και τη συνάρτηση g , που ορίζεται ως $g(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$, $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $g\left(\frac{x+\psi}{2}\right)<\frac{g(x)+g(\psi)}{2}$, $x,\psi\in[\alpha,\beta] \quad \mu\varepsilon \quad x<\psi$

β) $g\left(\lambda x+(1-\lambda)\psi\right)<\lambda g(x)+(1-\lambda)g(\psi)$, $\lambda\in(0,1) \quad \kappa\alpha\iota \quad x,\psi\in[\alpha,\beta] \quad \mu\varepsilon \quad x<\psi$

γ) η g παρουσιάζει σε ένα ακριβώς σημείο του [α ,β] ολικό ελάχιστο

δ) η g είναι γνησίως μονότονη ή υπάρχει γ στο διάστημα (α ,β) , ώστε η g να είναι γνησίως φθίνουσα στο [α ,γ] και γνησίως αύξουσα στο [γ ,β]

74. Σε ένα πληθυσμό Α ατόμων, μια είδηση διαδίδεται από άτομο σε άτομο με το στόμα και έστω P (t) ο αριθμός των ατόμων που τη χρονική στιγμή t γνωρίζουν την είδηση. Ο ρυθμός μεταβολής των ατόμων που γνωρίζουν την είδηση είναι ίσος με το γινόμενο P (t) (A – P (t)) και τη χρονική στιγμή t = 0 μόνο ένα άτομο γνωρίζει την είδηση.

α) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης P

β) να βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)$ και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα

75. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη με f ΄ (x) < 0 για κάθε x στο R. Ορίζουμε τη συνάρτηση F με τύπο $F(x)=\int_\alpha^\beta f(x-t)\,dt+2$, $x\in R$

α) να βρείτε την παράγωγο της F

β) να αποδείξετε ότι, αν υπάρχει ξ στο R με F ΄ (ξ) = 0 , τότε είναι F(x) = 2 για κάθε x στο R.

76. Μια αυτοκινητοβιομηχανία γνωρίζει ότι η συνάρτηση κόστους κίνησης f ενός μοντέλου της, ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)=e^{x^2-80x+f'(x)}(80-2x) \quad \mu\varepsilon \quad 0\le x\le 120$ (x η ταχύτητα του αυτοκινήτου) και f ΄(0) = f (0) = 0. Να βρείτε:

α) τον τύπο της συνάρτησης f

β) την ταχύτητα κατά την οποία έχουμε το μέγιστο κόστος κίνησης

77. Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, για την οποία $f'(x) = -4x^3 e^{f(x)}$, $x \in R$
και f (0) = – 1

α) να βρείτε τον τύπο της f

β) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία

γ) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού x = εφt , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{-\psi_{\mathrm{M}}} \frac{1}{x^2+1} dx, \text{ όπου } \psi_{\mathrm{M}} \text{ η μέγιστη τιμή της f}$$

78. Σε χάρτη που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, η ακτή ενός ηπειρωτικού τμήματος μιας χώρας είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$ και το γειτονικό προς αυτήν τμήμα ενός νησιού είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g με τύπο $g(x) = -4x^2,\ x > 0$. Ένα πλοιάριο εκτελεί δρομολόγια ανάμεσα στην ακτή του ηπειρωτικού τμήματος και το νησί, κινούμενο παράλληλα στον άξονα ψ΄ψ.

α) να βρείτε σημεία Α και Β στις ακτές, ώστε το πλοιάριο να διανύει την απόσταση ΑΒ στον μικρότερο δυνατό χρόνο, θεωρώντας ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα

β) δύο ταχύπλοα αναχωρούν από τα σημεία Α και Β και κινούμενα εφαπτόμενα με τις ακτογραμμές απομακρύνονται προς την ανοικτή θάλασσα. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία διασταυρώνονται οι πορείες τους.