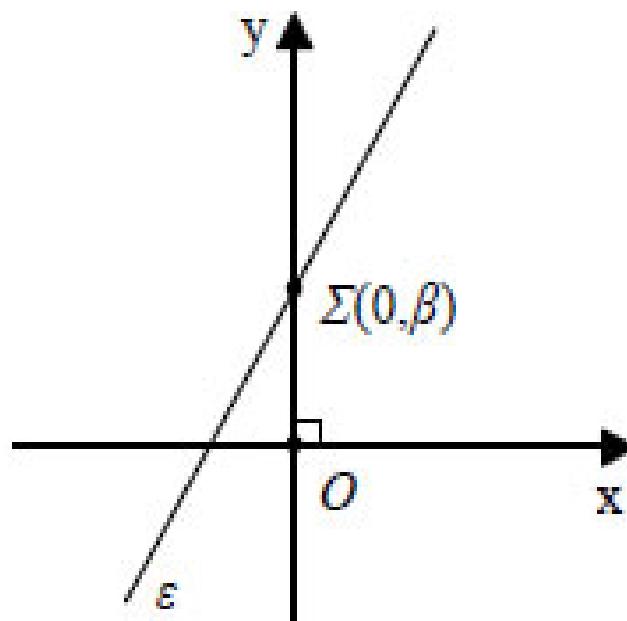


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΕΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ



Επιμέλεια: Άλκης Τζελέπης

I. Ερωτήσεις τύπου « ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ »

1. Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 0.
2. Υπάρχουν δύο ευθείες ϵ, ϵ' , με συντελεστές διεύθυνσης λ, λ' αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda = \lambda'$ και $\lambda\lambda' = -1$.
3. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x, y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε λ διάφορο του μηδενός.
4. Οι ευθείες $2x+y=1$ και $x-2y=1$ τέμνονται.
5. Οι ευθείες $y = -\kappa/3x+1$ και $y = -\lambda x+2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa=3\lambda$.
6. Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων, έχουν εξισώσεις $y = x, y = -x$ και τέμνονται κάθετα.
7. Τα σημεία $A(-2,-1), B(1,4), \Gamma(-4,2)$ είναι συνευθειακά.
8. Τα σημεία $A(\alpha+\beta,\gamma), B(\beta+\gamma,\alpha), \Gamma(\gamma+\alpha,\beta)$ είναι συνευθειακά με $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 0$.
9. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x+4$, έχει εξίσωση : $y-2 = -3(x-1)$.
10. Η ευθεία AB με $A(1,-4)$ και $B(-1,-5)$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 1/2x+3$.
11. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1,1)$ και σχηματίζει με τον x γωνία ίση με 135° , είναι η $x+y=0$.
12. Η ευθεία $2y-3x+4=0$, τέμνει τον x στο σημείο $(4/3,0)$.
13. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι $x = x_0$.
14. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον x , είναι 120° .
15. Η εξίσωση $Ax+Bx+\Gamma=0$ με $A \neq 0$, είναι πάντα ευθεία.
16. Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax+Bx+\Gamma=0$, είναι πάντα ευθεία.
17. Στην ευθεία με εξίσωση $Ax+Bx+\Gamma=0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Ισχύει $B=0$.
18. Κάθε εξίσωση ευθείας γράφεται στη μορφή $Ax+Bx=0$.
19. Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{d}_1 = (A,B)$ και $\vec{d}_2 = (-B,A)$ αντίστοιχα, είναι μεταξύ τους κάθετες.
20. Μία ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{d} = (A,B)$ με $B \neq 0$, έχει εξίσωση της μορφής $Ax+Bx+\Gamma=0$.
21. Η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1, \kappa \neq 0$, σχηματίζει πάντα αμβλεία γωνία με τον άξονα x .
22. Η ευθεία $x+\lambda(x-y)-\lambda=0$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy , για κάθε τιμή του λ .
23. Οι ευθείες $y=2x+1, y=2x-1, x+2y+1=0$ και $x+2y+2=0$, τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παρ/μο.

24. Η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1 : \psi = \lambda\chi + \beta_1, \varepsilon_2 : \psi = \lambda\chi + \beta_2$ δίδεται από τον τύπο

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

25. Οι ευθείες $2\chi - 3\psi = 11$ και $4\psi + 3\chi + 9 = 0$, έχουν κοινό σημείο το $(-1, 3)$.

26. Η εξίσωση $\chi\psi = \chi$ παριστάνει μία μόνο ευθεία του επιπέδου.

27. Το σημείο $A(\eta\mu\theta, 0)$ με $\theta = \pi/7$ ανήκει στην ευθεία $2\chi + \kappa\psi = 3$.

28. Η εξίσωση $\psi = \chi + \beta, \beta \in \mathfrak{R}$ παριστάνει οικογένεια ευθειών, παράλληλων με την ευθεία $\psi = \chi$.

29. Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές, που έχουν εξισώσεις: $3\chi - \psi = 4, \psi = -5\chi - 4, \psi = 3\chi + 5$.

30. Η συμμετρική της ευθείας $\psi = 3\chi$ ως προς άξονα $\chi'\chi$, έχει εξίσωση $\psi = 3\chi + 3$.

31. Η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 1)$ $B(6, 3)$ και $\Gamma(2, 2)$ είναι: $\psi - 2 = -1/2(\chi - 2)$.

32. Το εμβαδόν του τριγώνου, που ορίζεται από την ευθεία $2\chi + 5\psi = 10$ και τους άξονες, είναι 5τ.μ.

33. Όλες οι ευθείες της οικογένειας: $(\chi + \psi + 1) + \lambda(3\chi - 2\psi - 4) = 0$ περνούν από το σημείο $(2, 1)$.

34. Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών, είναι αδύνατο.

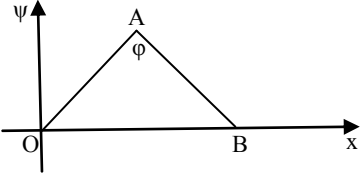
35. Η εξίσωση της ευθείας $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, μπορεί να γραφεί στη μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{\nu} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta} = (A, B), \vec{\nu} = (\chi, \psi)$.

36. Τα σημεία $A(1, 1)$ $B(-1, 1)$ και $\Gamma(1, -1)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

37. Οι ευθείες $A_1\chi + B_1\psi + \Gamma_1 = 0, A_2\chi + B_2\psi + \Gamma_2 = 0$ είναι κάθετες. Ισχύει $A_1A_2 = B_1B_2$.

38. Η εξίσωση $(\alpha^2 - \alpha + 1)\chi + (3\alpha^2 + 7)\psi - 2 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathfrak{R}$.

II. Ερωτήσεις «ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ»

- Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον ψ' , ισούται με :
 Α. 1 Β. -1 Γ. 0 Δ. $\epsilon\phi(\pi/4)$ Ε. δεν ορίζεται
 - Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας, που διέρχεται από τα σημεία $A(\chi_1, \psi_1), B(\chi_2, \psi_2)$, ορίζεται πάντα, όταν :
 Α. $\psi_1 \neq \psi_2$ Β. $\chi_1 = \chi_2, \psi_1 \neq \psi_2$ Γ. $\chi_1 \neq -\chi_2, \psi_1 \neq \psi_2$ Δ. $\psi_1 = \psi_2, \chi_1 = \chi_2$ Ε. $\chi_1 \neq \chi_2$
 - Στο σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ, είναι $\psi = \sqrt{3}\chi$.
 Η γωνία ϕ ισούται με :
 Α. $\pi/6$ Β. $\pi/3$ Γ. $\pi/4$ Δ. $\pi/2$ Ε. $3\pi/4$
- 
- Η εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία με :
 Α. $A=0$ και $B=0$ Β. $A=0$ ή $\Gamma \neq 0$ Γ. $A^2 + B^2 \geq 0$ Δ. $|A| + |B| > 0$ Ε. $|A| + |B| < 0$
 - Το κοινό σημείο του άξονα χ' και της ευθείας AB με $A(0,4)$ και $B(1,5)$ είναι :
 Α. (4,0) Β. (0,0) Γ. (5,0) Δ. (-4,0) Ε. (0,-3)
 - Η ευθεία $\psi = \lambda\chi + 3$:
 Α. είναι κάθετη στον χ' για κάποια τιμή του λ
 Β. είναι κάθετη στον ψ' για κάποια τιμή του λ
 Γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $\left(\frac{1}{\lambda}, 5\right)$
 Δ. περνάει από την αρχή των αξόνων
 Ε. για $\lambda=1$ είναι κάθετη στη ευθεία $\psi = \chi$
 - Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα ψ' αμβλεία γωνία, είναι :
 Α. $\psi = |\lambda| \cdot \chi - 2$ Β. $\psi = 2$ Γ. $\psi = 3\chi + 2$ Δ. $\psi = |\lambda| \cdot \chi + \beta$, με $\lambda < 0$ Ε. κάθετη στην $2\chi - 3\psi + 2 = 0$
 - Οι ευθείες $\chi + 2\psi + 1 = 0$ και $2\chi + \lambda\psi - 2 = 0$:
 Α. τέμνονται για κάθε λ Β. είναι και οι δύο κάθετες στην $\psi = \chi$ Γ. είναι κάθετες για $\lambda = -1$
 Δ. είναι παράλληλες για $\lambda = 2$ Ε. τέμνονται στο σημείο $(-1, 0)$ για $\lambda = 2$

9. Έστω $\varepsilon: Ax + B\psi + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$), τότε:

- A. το διάνυσμα $\vec{v} = (B, A)$ είναι κάθετο στην ε .
- B. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, -B)$ είναι παράλληλο στην ε .
- Γ. το διάνυσμα $\vec{v} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην ε .
- Δ. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην ε .
- E. το διάνυσμα $\vec{v} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην ε .

10. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(-1, 5)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\psi = 1/3\chi - 7$, έχει εξίσωση:

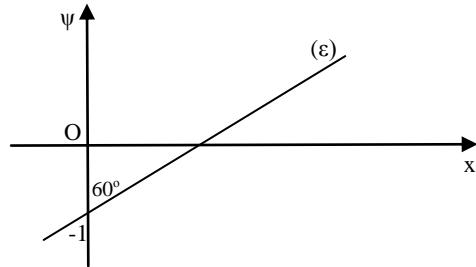
- A. $\psi = -3\chi + 7$ B. $\psi + 1 = -3(\chi - 5)$ Γ. $\psi - 5 = -3(\chi + 1)$ Δ. $\psi - 5 = 3(\chi + 1)$ E. $\psi + 1 = 3(\chi + 5)$

11. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $\chi' \chi$, $\psi' \psi$ στα $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ αντίστοιχα με $\alpha = 2\beta$, τότε:

- A. η (ε) σχηματίζει γωνία 60° με τον $\chi' \chi$
- B. η (ε) σχηματίζει γωνία 90° με τον $\chi' \chi$
- Γ. η (ε) σχηματίζει οξεία γωνία με τον $\chi' \chi$
- Δ. η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον $\chi' \chi$
- E. ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $1/2$

12. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

- A. $\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}\chi + 1$ B. $\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}\chi - 1$ Γ. $\psi = \sqrt{3}\chi + 1$
- Δ. $\psi = 1/2\chi + 1$ E. $\psi = 1/2\chi - 1$



13. Αν το σημείο $(3, \kappa)$ ανήκει στην (ε): $\frac{x-1}{2} + \frac{\psi-2}{3} = 1$, τότε:

- A. $\kappa = 0$ B. $\kappa = 2$ Γ. $\kappa = 3$ Δ. $\kappa = 5$ E. $\kappa = 1$

14. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $\psi^2 = \chi^2$ παριστάνει:

- A. μια ευθεία κάθετη στον $\chi' \chi$
- B. τη διχοτόμο της γωνίας $\chi O \psi$
- Γ. τη διχοτόμο της γωνίας $\psi O \chi'$
- Δ. τις διχοτόμους των γωνιών $\chi O \psi$ και $\psi O \chi'$
- E. μια ευθεία κάθετη στον $\psi' \psi$

15. Αν $A(1,3)$ και $B(5,3)$, το συμμετρικό του μέσου του AB , ως προς τον άξονα $\chi'\chi$, είναι το:
Α. $(2,3)$ Β. $(2,-3)$ Γ. $(3,-3)$ Δ. $(-3,3)$ Ε. $(-3,-3)$
16. Δίδεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(0,0)$, $B(3,1)$, $\Gamma(5,3)$ και $\Delta(\kappa,\kappa)$. Η τιμή του κ , είναι:
Α. 3 Β. 2 Γ. 1 Δ. -2 Ε. -3
17. Τα σημεία $A(\alpha,\alpha+1)$, $B(\alpha+1,\alpha+2)$ και $\Gamma(\alpha+2,\alpha+3)$, είναι:
Α. συνευθειακά
Β. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου
Γ. κορυφές ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου
Δ. κορυφές ισοπλεύρου και ορθογωνίου τριγώνου
Ε. κορυφές ισοσκελούς και οξυγωνίου τριγώνου
18. Οι ευθείες $2\chi-3\psi+4=0$ και $3\psi-2\chi+2=0$, είναι:
Α. συμμετρικές ως προς τον άξονα $\chi'\chi$
Β. συμμετρικές ως προς τον άξονα $\psi'\psi$
Γ. συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων
19. Για την ευθεία (ϵ) : $(\lambda-1)\chi+(3-\lambda)\psi-(\lambda-2)=0$ ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει:
Α. $\lambda=3$ Β. $\lambda \neq 1$ Γ. $\lambda=2$ Δ. $\lambda \neq 3$ Ε. $\lambda \neq 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1,2)$, $B(3,-2)$ και $\Gamma(1,4)$. Να βρεθούν:
 - οι εξισώσεις των πλευρών του
 - οι εξισώσεις δύο υψών του
 - οι εξισώσεις δύο διαμέσων του
 - οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του
 - οι συντεταγμένες του ορθόκεντρου, του βαρύκεντρου, του έγκεντρου και του περίκεντρου.
- Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου $A(\kappa\sigma\upsilon\eta\phi, \lambda\eta\mu\phi)$, $B(\kappa\eta\mu\phi, -\lambda\sigma\upsilon\eta\phi)$ και $\Gamma(\kappa, \lambda)$, όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί και $0 < \phi < \pi$. Βρείτε για ποιες τιμές του ϕ τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- Τα σημεία $K(1, 1)$, $\Lambda(2, 2)$ και $M(3, -1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλόγραμμου. Να βρείτε:
 - τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
 - τις συντεταγμένες του κέντρου του
 - το εμβαδόν του
- Μία κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $2x-3\psi+20=0$ και $3x+5\psi-27=0$ και η μία διαγώνιος του βρίσκεται επί της ευθείας $x+7\psi-16=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου, καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.
- Να βρείτε τις εξισώσεις ευθειών, που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x-3\psi-12=0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού ίσο με $12\tau.μ.$
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-8, 2)$, $B(7, 4)$ και ορθόκεντρο $H(5, 2)$. Να βρείτε:
 - την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 - τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 - τις εξισώσεις των πλευρών του
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$ και εξισώσεις δύο διαμέσων του τις $x-3\psi+1=0$ και $\psi-1=0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:
 - $\epsilon: 3x-\psi+1=0$ και $\zeta: -6x+2\psi-3=0$
 - $\epsilon: x=4$ και $x+6=0$
 - $\epsilon: \psi=x$ και $\psi=x-3$

9. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon: (\mu+1)x + (\mu+2)\psi = 0$ και $\zeta: \mu x - (3\mu+2)\psi + 7 = 0$.
 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε η γωνία των δύο ευθειών να είναι 90°
10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega)$ και $B(\eta\mu\varphi, \sigma\upsilon\nu\varphi)$, $(0 \leq \omega \neq \varphi < \frac{\pi}{2})$. Να βρείτε επιπλέον την απόσταση του σημείου $O(0, 0)$ από αυτήν.
11. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 4)$ και $\Gamma(9/2, 6)$.
 α) να δείξετε ότι $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$
 β) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$
 γ) να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$
12. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 0)$, $B(2\lambda, 3\lambda)$, $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την ευθεία $x = -2\lambda$ στο Γ , να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
13. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon: 2x-3\psi+1=0$, $\zeta: -x+4\psi+3=0$ και το σημείο $A(1, -2)$.
 Να βρείτε σημείο M της ζ , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ϵ .
14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\psi^2 - 3x\psi - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών.
 Στη συνέχεια να βρείτε τη σχετική θέση αυτών των ευθειών.
15. Δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$, $B(3, -1)$ και η ευθεία $\epsilon: \psi = -3x$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B .
16. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: x + \psi = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(2, 3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ϵ .
17. Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda\psi + 5\lambda = 3\psi - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
18. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$.
 α) να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB
 β) να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του \overline{AB}
 γ) να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του AB
 δ) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στο AB
 ε) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου, που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία A, B .

19. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon: ax + b\psi = 0$, $\varepsilon_1: ax - b\psi + \gamma = 0$, $\varepsilon_2: ax - b\psi - \gamma = 0$ και $\varepsilon_3: ax + b\psi - \gamma = 0$, με $a, b, \gamma \neq 0$. Να δείξετε ότι:
- η ε_1 είναι συμμετρική της ε , ως προς άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$
 - η ε_2 είναι συμμετρική της ε , ως προς άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$
 - η ε_3 είναι συμμετρική της ε , ως προς κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$
20. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2} + \psi\eta\mu^2 \frac{\theta}{2} + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
21. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)\psi - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$, $\lambda \in R$.
Για ποιές τιμές του λ παριστάνει ευθεία;
22. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο σημείων M του επιπέδου, με $M(\lambda - 1, 2\lambda + 3)$, $\lambda \in R$.
23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 2\kappa)$, $B(2\kappa, \kappa)$ και $\Gamma(\kappa - 2, -\kappa)$, όπου κ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου.
24. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες με εξισώσεις $3x - 2\psi + 4 = 0$ και $3x - 2\psi + 6 = 0$
25. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \psi^2 - 4\lambda\psi - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Στη συνέχεια να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο ευθειών.
26. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, 2)$ έχουν σταθερή διαφορά κ , είναι ευθεία κάθετη στην AB .
27. Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $x + 1998\psi = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών με εξίσωση $(x + \psi - 4) + \lambda(x - 3\psi - 4) = 0$
28. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία με εξίσωση $x + \psi + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.
Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.
29. Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $\psi = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο του P ως προς την ευθεία $x + 2\psi - 1 = 0$, κινείται πάνω στην ευθεία $7x - \psi - 2 = 0$
30. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων είναι $\Pi_1(t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2(3t, 3t - 1)$ σε κάθε χρονική στιγμή στιγμή $t > 0$.
- Να βρεθούν οι πορείες των δύο πλοίων
 - Να βρεθεί αν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία θα συναντηθούν τα δύο πλοία
 - Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$

31. Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα με αφετηρία τα σημεία A και B αντίστοιχα, φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

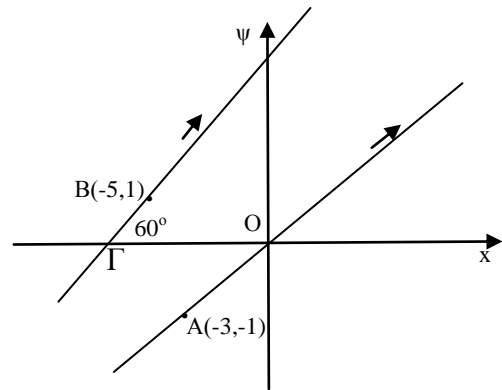
α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων

A και B

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ

γ) Να βρεθεί η απόσταση του B από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλο κινητό

δ) Να εξετασθεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών



32. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων, η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A ;

β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι, όταν η πορεία του είναι ευθύγραμμη

γ) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;

33. Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται στο εσωτερικό της κατασκήνωσης) θέλοντας να υπολογίσει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, στέλνει τρεις κατασκηνωτές να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2km βόρεια και στη συνέχεια 1km ανατολικά, όπου συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3km ανατολικά και 1km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.

α) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σε αυτό το σύστημα

β) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης

34. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Ox\psi$ ένα πλοιάριο ξεκινά από ένα λιμάνι A και κατευθύνεται προς το λιμάνι O . Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t , δίνει τις εξής συντεταγμένες για το πλοιάριο: $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$

α) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A ;

β) Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα δύο λιμάνια;

γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοιαρίου; Ποιά είναι η εξίσωσή της;

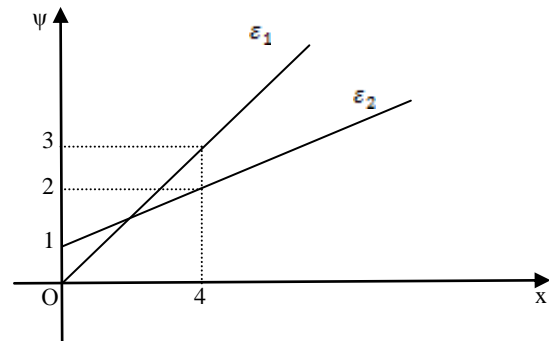
35. Σε ένα εργοστάσιο ο νέος διευθυντής ζήτησε να ενημερωθεί για την οικονομική πορεία της επιχείρησης από το έτος ίδρυσής της. Ο υπεύθυνος των οικονομικών του παράδωσε το παρακάτω σχεδιάγραμμα:

ε_1 : η ευθεία των εσόδων

ε_2 : η ευθεία των εξόδων

Ox: ο άξονας των ετών λειτουργίας

Oy: ο άξονας των εκατοντάδων χιλιάδων ευρώ



- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2
- β) Να βρείτε πόσα έτη μετά την έναρξη της λειτουργίας της, η επιχείρηση αρχίζει να έχει κέρδη
- γ) Να βρείτε τα κέρδη της επιχείρησης το τέταρτο έτος της λειτουργίας της
- δ) Πότε η επιχείρηση θα παρουσιάσει κέρδη 300 χιλιάδες ευρώ;
36. Να βρείτε εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$ και τα σημεία $B(3, 2)$ και $\Gamma(-1, 2)$ ισαπέχουν από αυτήν.
37. Να βρείτε εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1, 2)$ και σχηματίζει με την ευθεία $2x + \psi + 1 = 0$ γωνία 45°
38. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-1, 2)$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $B(1, 1)$ και $\Gamma(-3, 5)$.
39. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι συμμετρική της $\varepsilon: x + \psi - 1 = 0$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $\zeta: x - \psi + 1 = 0$.
40. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ , ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon: 2x + \mu\psi + 1 = 0$, $\zeta: x + 2\psi + \mu = 0$ και $\eta: \mu x + \psi + 2 = 0$ να διέρχονται από το ίδιο σημείο.
41. Μια ακτίνα φωτός ακολουθεί την πορεία της ευθείας $\varepsilon: x - 2\psi + 5 = 0$ και ανακλάται πάνω στην ευθεία $\eta: 3x - 2\psi + 7 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας την οποία ακολουθεί η ευθεία μετά την ανάκλαση.
42. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(-4, -5)$ και οι $\varepsilon: 5x + 3\psi - 4 = 0$, $\zeta: 3x + 8\psi + 13 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο υψών του. Να βρείτε τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών του και τις εξισώσεις των πλευρών του.
43. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου, το οποίο έχει το $B(2, -6)$ κορυφή και οι $x - 1 = 0$, $x + 7\psi - 9 = 0$ είναι αντίστοιχα οι εξισώσεις ενός ύψους και μιας διχοτόμου από την ίδια κορυφή.

44. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3, 0)$ και ορίζει με τις ευθείες $\epsilon: 2x - \psi - 2 = 0$ και $\zeta: x + \psi = 3 = 0$ ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσον το P .
45. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, -2)$, $B(2, 3)$ και εμβαδόν ίσο με 8. Να βρείτε τις συντεταγμένες της τρίτης κορυφής Γ , αν αυτή ανήκει σε ευθεία με εξίσωση $2x + \psi - 2 = 0$.
46. Τα σημεία $A(-1, 3)$ και $\Gamma(6, 2)$ είναι απέναντι κορυφές τετραγώνου.
Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών.
47. Το σημείο $E(1, -1)$ είναι το κέντρο παραλληλόγραμμου, του οποίου η μία πλευρά ανήκει στην ευθεία $\epsilon: x - \psi + 12 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των υπόλοιπων πλευρών του.
48. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4, -1)$, οι $x - 1 = 0$ και $x - \psi - 1 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
49. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η μία κορυφή έχει συντεταγμένες $(1, 3)$ και οι $x - 2\psi + 1 = 0$, $\psi - 1 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο διαμέσων του. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
50. Να βρείτε εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τις ευθείες $\epsilon: x - \psi + 12 = 0$ και $\zeta: 2x + \psi + 9 = 0$ ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το σημείο τομής των ϵ , ζ .
51. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, $\Gamma(-\alpha, 0)$, $\Delta(0, -\beta)$. Αν M είναι σημείο της AB με τετμημένη x' και P σημείο της $B\Gamma$ με τετμημένη $-2x'$, να αποδειχθεί ότι η διεύθυνση της ευθείας PM είναι ανεξάρτητη του x' . Αν N είναι σημείο της ευθείας $A\Delta$ με τετμημένη x' , να αποδειχθεί ότι η NP διέρχεται από σημείο ανεξάρτητο του x' .
52. Δίνονται τα σημεία $A(-4, 0)$ και $B(0, 6)$. Από το μέσο του AB διέρχεται μία ευθεία (ϵ) η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο K και τον $\psi'\psi$ στο Λ .
Να βρεθεί η εξίσωση της (ϵ) αν $(OK) = 2(O\Lambda)$.
53. Να βρεθεί εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και μαζί με τις ευθείες $\zeta: x + \psi = \alpha$ και $\eta: x = 0$ σχηματίζει τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με α^2 .
54. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που είναι παράλληλη στην $\zeta: 2x + 3\psi + 1 = 0$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού ίσου με 3.
55. Οι εξισώσεις δύο διαδοχικών πλευρών ρόμβου είναι $\psi = 2x + 4$ και $3\psi = -x - 2$. Αν το σημείο $A(4, 6)$ είναι μία κορυφή του, να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
56. Μία πλευρά ρόμβου βρίσκεται στην ευθεία $\epsilon: 5x + 7\psi = 1$ και μία κορυφή του στο $A(3, -2)$. Αν μία διαγώνιος του βρίσκεται στην ευθεία $\zeta: x + 1 = 3\psi$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
57. Να βρεθούν οι εξισώσεις ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(2, 7)$ και η απόστασή τους από το σημείο $B(1, 2)$ είναι ίση με 5.

58. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon: (2\lambda + 1)x + 3\psi + (2\mu + 5) = 0 \quad \text{και} \quad \zeta: (4\lambda + 3)x + (\lambda + 6)\psi + (3\mu - 1) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

β) Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε οι παράλληλες ευθείες να έχουν απόσταση ίση με $5\sqrt{2}$

59. Θεωρούμε τα σημεία $A(0, 1)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(1, 1)$. Να βρεθεί ένα σημείο M , ώστε τα τρίγωνα MOA και $MB\Gamma$ να είναι ισοσκελή με κορυφή το σημείο M .

60. Θεωρούμε τις ευθείες:

$$\varepsilon: \psi = \alpha x + \frac{1}{\alpha}, \quad \zeta: \psi = \beta x + \frac{1}{\beta}, \quad \eta: \psi = \gamma x + \frac{1}{\gamma} \quad \text{με} \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 0$$

Να δείξετε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν τρίγωνο, του οποίου το ορθόκεντρο ανήκει σε σταθερή ευθεία.

61. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(6,6)$, $B(-3, 0)$ και $\Gamma(3\mu-1, 2\mu+3)$.

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ

β) Ναδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

62. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda, -\frac{\lambda}{2})$ αν γνωρίζουμε ότι η ευθεία

$$\varepsilon: (2\lambda + 1)x + \frac{1}{2}\lambda^2\psi + 2 = 0 \quad \text{διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών} \quad \zeta: x + \psi - 1 = 0$$

$$\text{και} \quad \eta: 2x - \psi + 4 = 0$$