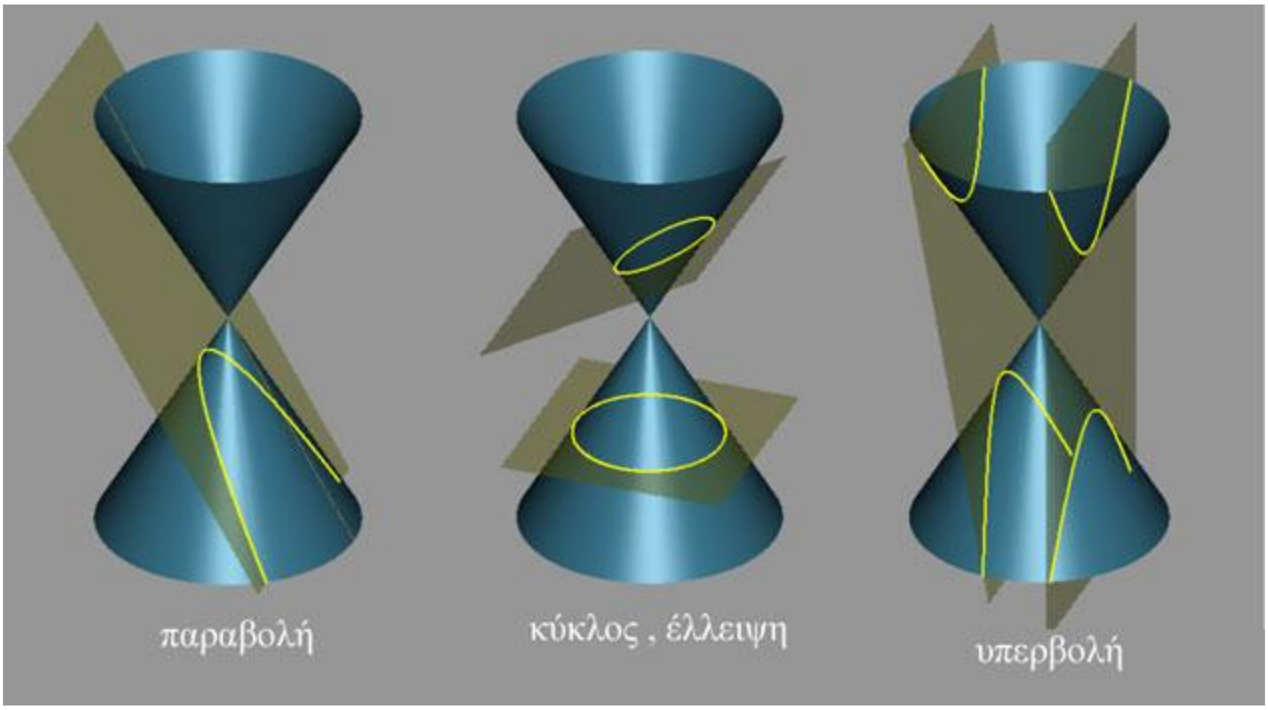
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ



Επιμέλεια: Άλκης Τζελέπης

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Ο κύκλος $(χ\text{-}α)^2+(ψ\text{-}β)^2=α^2$ ι) εφάπτεται στον χ΄χ, ιι) εφάπτεται στον ψ΄ψ, ιιι) διέρχεται από το Α(α,0), ιv) διέρχεται από το Β(0,β).
2. Οι κύκλοι $C_1: (χ\text{-}1)^2+ψ^2=1$, $C_2: χ^2+(ψ\text{-}2)^2=4$ i) εφάπτονται εσωτερικά, ii) εφάπτονται εξωτερικά, iii) τέμνονται, iv) δεν έχουν κοινά σημεία.
3. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (χ\text{-}1)^2 + (ψ\text{-}2)^2=9$, $C_2: (χ+1)^2 + (ψ+2)^2=9$. Το σημείο Α(1,0) είναι: i) εσωτερικό και των δύο κύκλων, ii) εξωτερικό και των δύο κύκλων, iii) εσωτερικό του ενός και εξωτερικό του άλλου, iv) τίποτα από αυτά.
4. Η ευθεία ε: $ψ = χ\text{-}2$ και ο κύκλος C: $χ^2 + ψ^2 = 4$ i) εφάπτονται, ii) τέμνονται, iii) δεν έχουν κοινά σημεία.
5. Ο κύκλος με παραμετρικές εξισώσεις $χ = 3συνφ$, $ψ = 3ημφ$, $φ \in [\,0,2π\,)$ και η ευθεία (ε): $ψ = χ – 3$, i) εφάπτονται, ii) τέμνονται, iii) δεν έχουν κοινά σημεία.
6. Ο κύκλος $χ^2 + ψ^2 = 9$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ i) εφάπτονται, ii) τέμνονται, iii) δεν έχουν κοινά σημεία.
7. Η Β(0,β) είναι μία κορυφή της έλλειψης C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{ψ^2}{β^2}=1$ και Ε΄, Ε οι εστίες της. Στο τρίγωνο ΒΕ΄Ε είναι: i) ΒΕ > β, ii) ΒΕ = α, iii) ΒΟ = α – γ
8. Στη διπλανή παραβολή C: $ψ^2= 2\,ρχ$, με εστία το Ε και διευθετούσα την ευθεία (δ), είναι : i) ΑΒ = p, ii) ΑΒ >p, iii) ΑΒ = 2p.
9. Στην παραβολή $ψ^2= 2\,px$, το σημείο Μ(p/2, 2p) βρίσκεται: i) στο εσωτερικό της, ii) στο εξωτερικό της, iii) πάνω σε αυτήν.
10. Δίνεται ο κύκλος με παραμετρικές εξισώσεις: χ=3συνφ, ψ=3ημφ $φ \in [\,0,2π)$. Το σημείο Α(2,5) είναι : ι) εσωτερικό του κύκλου, ιι) εξωτερικό του κύκλου, ιιι) σημείο του κύκλου.
11. Ο κύκλος $(χ\text{-}α)^2 + (ψ\text{-}β)^2 = ρ^2$, ρ > 0, εφάπτεται στους δύο άξονες συντεταγμένων. Είναι τότε: i) α = β = ρ, ii) α = β = 0, iii) $|a|=|β|=ρ$

12. Ο κύκλος $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2=\rho^2$, $\rho>0$ διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Είναι τότε :

    i) $\alpha^2+\beta^2=\rho^2$, ii) $\alpha=\beta=0$, iii) $\alpha=\beta=\rho$

Β. Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς:

1. Ο κύκλος $\chi^2+(\psi-1)^2=9$ έχει το κέντρο του στον άξονα χ΄χ
2. Η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{26}=1$ έχει τις εστίες στον άξονα χ΄χ
3. Η υπερβολή $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ έχει τις κορυφές της στον άξονα ψ΄ψ.
4. Η παραβολή $\chi^2=2py$ έχει τη διευθετούσα της κάθετη στον άξονα χ΄χ.
5. Το σημείο Μ(1,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\chi-2)^2+(\psi+3)^2=4$.
6. Η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και η υπερβολή $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ έχουν ίδιες εστίες.

Γ. Να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

1. Είναι δυνατόν από το σημείο Α(2,2) να αχθεί εφαπτομένη προς τον κύκλο $(\chi-1)^2+(\psi-3)^2=16$;
2. Να βρεθεί το κέντρο του κύκλου, που περνά από τα σημεία Ο(0,0), Α(0,α) και Β(β,0) όπου $\alpha>0$, $\beta>0$
3. Θεωρούμε τα σημεία Μ(α, α), Κ(α, -α), Λ(-α, -α), Ν(-α, α), με $a\neq 0$.Τα σημεία αυτά:
   Ι) ανήκουν στον ίδιο κύκλο, ΙΙ) είναι κορυφές τετραγώνου, ΙΙΙ) είναι κορυφές ορθογωνίου.
4. Θεωρούμε τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=2$. Τι παριστάνει η εξίσωση $\chi+\psi=2$;
5. Η σχέση $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2\geq p^2$ παριστάνει: Ι) κύκλο, ΙΙ) εξωτερικό κύκλου και κύκλο, αν $\rho\neq 0$, ΙΙΙ) εξωτερικό κύκλου, αν $\rho\neq 0$, IV) είναι αδύνατη, αν ρ=0.
6. Ο κύκλος $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2=\beta^2$, $\alpha\neq\pm\beta$, εφάπτεται:
   Ι) στον ψ΄ψ, ΙΙ) στην ευθεία ψ = χ, ΙΙΙ) στον χ΄χ.
7. Οι εξισώσεις $\chi=\alpha+\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $\psi=\beta+\rho\eta\mu\theta$, με $\theta\in[0,2\pi]$ παριστάνουν:
   Ι) ευθεία, ΙΙ) κύκλο, ΙΙΙ) ζεύγος ευθειών.

8. Πως θα βρούμε την εξίσωση του κύκλου που περνά :

   α) από ένα σημείο

   β) από δύο σημεία που δεν είναι αντιδιαμετρικά

   γ) από τρία σημεία

9. Πως συνδέονται οι ευθείες (ε): $\chi+2\psi=5$, (ε΄): $2\chi-\psi=5$, με τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=5$;
10. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(2+3συνθ, 5+3ημθ), όπου θ μεταβλητή γωνία, είναι:

    Ι) ευθεία, ΙΙ) κύκλος, ΙΙΙ) τόξο κύκλου.

11. Είναι σωστός ή λάθος ο ισχυρισμός ότι η εξίσωση της παραβολής $\psi^2 = 2px$, με $p > 0$ αποτελεί συνάρτηση ;
12. Ομοίως για την $\chi^2=2py$;
13. Είναι σωστός ή λάθος ο ισχυρισμός ότι αν η εστία της παραβολής Ε έχει συντεταγμένες (0,p/2), τότε είναι $\psi \geq 0$;
14. Αν p είναι η παράμετρος της παραβολής, τότε ο $|p|$ παριστάνει :

    Ι) την απόσταση της εστίας από την κορυφή

    ΙΙ) την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα

    ΙΙΙ) την τετμημένη της εστίας.

15. Αν ρ είναι η παράμετρος της παραβολής, τότε η διευθετούσα έχει εξίσωση :

    Ι) $\psi = -\rho/2$, ΙΙ) $\chi = -\rho/2$.

16. Δίνεται η παραβολή $\psi^2=2\rho\chi$, ($\rho>0$) και το σημείο Α(1,2). Τότε :

    Ι) το σημείο Α ανήκει στην παραβολή, ΙΙ) το σημείο Α δεν ανήκει στην παραβολή,

    ΙΙΙ) το σημείο Α ανήκει στην παραβολή, μόνο αν $\rho=2$.

17. Μία παραβολή με άξονα συμμετρίας τον χ΄χ και $\rho = 1/2$ έχει εξίσωση:

    Ι) $\psi^2 = \chi$, ΙΙ) $\chi^2=8\psi$, ΙΙΙ) $\psi^2=1/2\ \chi$.

18. Μία παραβολή που έχει άξονα συμμετρίας τον χ΄χ και περνά από το σημείο Α(-2,3) έχει εξίσωση : Ι) $\chi^2=-9/2\psi$, ΙΙ) $\psi^2=-9/2\chi$, ΙΙΙ) $\psi^2=9\chi$.
19. Είναι σωστό ή λάθος ότι για την εξίσωση της παραβολής $\psi^2=2\rho\chi$, με $\rho>0$ ισχύουν:

    Ι) $x \geq 0$, $y \in \Re$ ΙΙ) $y \geq 0$, $x \in \Re$ ΙΙΙ) $\chi < 0$, $\psi > 0$

20. Είναι σωστό ή λάθος ότι αν το σημείο Μ(α ,β) ανήκει στην παραβολή $\psi^2=2\rho\chi$, τότε το σημείο Μ΄(α,-β) ανήκει στην παραβολή ;
21. Θεωρούμε την παραβολή $\psi^2=2\rho\chi$, $\rho > 0$. Θεωρούμε και τα σημεία της Α(6ρ, $\sqrt{12}\,\rho^2$), Β(6ρ, -$\sqrt{12}\,\rho^2$). Τότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι: Ι) ορθογώνιο, ΙΙ) ισοσκελές, ΙΙΙ) ισόπλευρο.

22. Αν μία παραβολή έχει κορυφή Ο(0,0) και διευθετούσα την ευθεία 2χ+4=0, τότε η εξίσωσή της είναι : Ι) $\psi^2 = 8\chi$, ΙΙ) $\chi^2 = 8\psi$, ΙΙΙ) $\psi^2 = -8\chi$.
23. Ποιες συναρτήσεις προκύπτουν από την εξίσωση της έλλειψης ;
24. Αν το σημείο Μ(2,1) της έλλειψης έχει την ιδιότητα (ΜΕ΄) + (ΜΕ) =8, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της, τότε είναι: ι) α = 4, β= $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ιι) α = 2, β = 3 ιιι) τα α, β δεν υπολογίζονται.
25. Η έλλειψη με $\alpha \neq \beta$ περιέχεται: ι) σε ρόμβο, ιι) σε τετράγωνο, ιιι) σε ορθογώνιο.
26. Είναι σωστό ή λάθος ότι η εξίσωση: $\frac{x^2}{(-5)^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ παριστάνει έλλειψη ;
27. Η υπερβολή δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Σωστό ή λάθος ;
28. Η υπερβολή τέμνει τον άξονα ψ΄ψ. Σωστό ή λάθος ;
29. Η ευθεία βχ-αψ=0 και η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν κοινά σημεία. Σωστό ή λάθος ;
30. Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ και η υπερβολή $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. Σωστό ή λάθος;
31. Τι μπορεί να σημαίνει μία ισότητα της μορφής $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{\beta^2} = 1$ α > 0, β> 0;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο Κ(2,-1) και κόβει από την ευθεία 3χ-4ψ=-10 χορδή μήκους 6.
2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(2,-6), Β(1,7) και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας 3χ+2ψ=0.
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που τέμνει την ευθεία 2χ-ψ+6=0 στα σημεία Α(2,10), Β(-2,2) και την ευθεία χ+ψ=8 στα Γ(1,7) και Δ(-3,11).
4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(3,2), Β(7,6) και εφάπτεται στον άξονα χ΄χ.
5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $\chi^2 + y^2 = 9$, η οποία :

   I) Είναι παράλληλη στην ευθεία ψ=2χ-1.

   II) Είναι κάθετη στην ευθεία ψ= -1/3χ+2.

   III) Διέρχεται από το σημείο Α(2,4).
6. Δίνεται ο κύκλος κ: $\chi^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 3χ-4ψ+5=0.
7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: 2χ-ψ+4=0 στο σημείο Α(3,10) και διέρχεται από το Β(7,2).
8. Δίνεται η εξίσωση K_λ: $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 2\lambda y + \frac{9\lambda^2}{2} - \lambda - 1/2 = 0, \lambda \in \Re$.

   I) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \Re$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

   II) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκονται τα κέντρα των κύκλων για κάθε $\lambda \in \Re$

   III) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
9. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 4\alpha\chi + 10\beta\psi + 4\alpha^2 + 16\beta^2 = 0$, (1) με $\beta \neq 0$.

   I) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο.

   II) Να δείξετε ότι το σημείο Α($2a, -2\beta$) ανήκει στον κύκλο.

   III) Να βρείτε τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού του Α.
10. Να δείξετε ότι η εξίσωση (χ-α)(χ-β) + (ψ-γ)(ψ-δ) = 0 παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α(α, γ), Β(β, γ), Γ(β, δ), Δ(α, δ) και ότι οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροι του κύκλου.

11. Δίνονται δύο κύκλοι που διέρχονται από το σημείο Α(14,2) έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία χ-2ψ=0 και εφάπτονται στον άξονα χ΄χ.
   Να βρείτε: ι) Τις εξισώσεις τους ιι) Την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης τους.

12. Δίνεται ο κύκλος κ: $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο Α(3,1). Να βρείτε :
   I) Τη θέση του σημείου Α ως προς τον κύκλο.
   II) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων από το Α προς τον κύκλο.
   III) Τη γωνία των εφαπτομένων.
13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες ε: 2χ-3ψ+6=0, ε΄: -4χ+6ψ+24=0 και το ένα από τα σημεία επαφής είναι το Α(3,4).
14. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ και το σημείο Α(2,1). Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το Α.
15. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο κ: $x^2 + y^2 = \rho^2$ είναι κάθετες.
16. Δίνεται ο κύκλος κ: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ και η ευθεία ε: ψ=χ+2.
   I) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο.
   II) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής που ορίζει η ευθεία στον κύκλο.
17. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες ε: χ-2ψ+4=0 και ε΄: 2χ-ψ-8=0 και διέρχεται από το σημείο Α(4,-1).
18. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία Α(-2,5), Β(4,-1) είναι σταθερός και ίσος με 3.
19. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου κ: $x^2 + y^2 = \rho^2$, που διέρχονται από το σημείο Α(α, β) με $|a| > \rho$.
20. Από το σημείο Μ(-3,-8) φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο κ: $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ και έστω Α, Β τα σημεία επαφής.
   I) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ΜΑ, ΜΒ.
   II) Να βρείτε το μήκος των ΜΑ, ΜΒ.
   III) Αν Κ το κέντρο του κύκλου, να δείξετε ότι η ΜΚ είναι μεσοκάθετη στο ΑΒ

21. Δίνεται ο κύκλος κ: $x^2 + y^2 = \alpha^2, \alpha \succ 0$. Για τυχαίο σημείο Α(χ΄,ψ΄) του κύκλου θεωρούμε το σημείο Β(χ΄0), που αποτελεί την ορθή προβολή του Α στον χ΄χ , και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο ώστε $\frac{(MB)}{(AB)} = \frac{\beta}{\alpha}$, 0 < β < α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ όταν το Α γράφει τον κύκλο κ.

21. Δίνεται η εξίσωση κ: $x^2 + y^2 - \lambda x - \lambda y = 0$ (1) και η ευθεία ε: ψ = χ + 3 (2).

I) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο.

II) Να βρείτε τα $\lambda \in \Re$,ώστε η ευθεία να τέμνει τον κύκλο κ.

III) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \Re$, ώστε η χορδή που ορίζεται από την τομή της (ε) και του (κ) να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

22. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο σημείων του επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερός και διαφορετικός της μονάδας.

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\lambda y - 4 = 0$ (1).

I) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \Re$.

II) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

III) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής αυτών των κύκλων.

24. Δύο κινητά αναχωρούν την ίδια στιγμή από ένα σημείο Κ(2,-1) ενός κύκλου, κινούνται δε επί του κύκλου με αντίθετη φορά. Αν οι ταχύτητές τους είναι αντίστοιχα 46m/sec και 32m/sec, να βρεθεί μετά πόσα λεπτά από την αναχώρησή τους θα συναντηθούν για πρώτη φορά. Δίνεται ότι ο κύκλος περνά από τα σημεία Λ(-2,-3) και Μ(-1,4).

25. Θεωρούμε ένα χάπι κυκλικής διατομής με εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$. Με μία λαβίδα κρατάμε το χάπι. Αν η κορυφή της λαβίδας έχει συντεταγμένες (4,2), να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα δύο σκέλη της λαβίδας.

26. Η πόλη Ρωμανία που κατασκευάζεται στη Θράκη θα έχει μία σύγχρονη ρυμοτομία. Συγκεκριμένα θα έχει 300 κάθετους και 200 οριζόντιους δρόμους. Στη διασταύρωση της 60ης με την 20η οδό έχει προγραμματιστεί να ανοίξει ένα σχολείο. Θέλουμε να ανοίξουμε ένα άλλο σχολείο σε απόσταση 100 και άνω μέτρων από το πρώτο.

I) Να περιγραφεί η περιοχή που μπορούμε να αναζητήσουμε τη στέγη.

II) Η διασταύρωση της $65^{ης}$ με την $30^{η}$ οδό προσφέρεται;

27. Σε ένα δοκιμαστικό σωλήνα υπάρχουν μικροοργανισμοί, οι οποίοι με την προσθήκη ενός φαρμάκου ελαττώνονται συνεχώς. Έστω ψ ο αριθμός των μικροοργανισμών αυτών και χ ο χρόνος μείωσης του αριθμού αυτού σε ημέρες. Αν $\chi = \alpha / \text{συν}\varphi$, $\psi = \text{εφ}\varphi$ όπου α σταθερά και φ γωνία έτσι ώστε $\varphi \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$, τότε:

    I) Να καθοριστεί η καμπύλη που διαγράφει το φαινόμενο.

    II) Να προσδιοριστεί το α αν μετά 100 ημέρες οι μικροοργανισμοί είναι 10^{10}.

    III) Να βρεθεί ο αριθμός των μικροοργανισμών 1000 ημέρες μετά από την προηγούμενη παρατήρηση.

28. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n=1,2,3,\ldots,1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο $O\chi\psi$ διαγράφοντας μία τροχιά με εξίσωση: $(\chi-1)^2 + \psi^2 = 2n\,(\chi+\psi-1)$. Να δειχθεί ότι:

    I) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

    II) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A;

    III) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $\chi+\psi-1=0$ στο σημείο A.

29. Υποθέτουμε ότι σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων $O\chi\psi$, στο σημείο O βρίσκεται ο πυρήνας ενός ατόμου και ότι τα ηλεκτρόνια διαγράφουν τροχιές, που καθορίζονται από τις εξής εξισώσεις : $\chi = n\,\text{συν}\varphi$ και $\psi = n\,\text{ημ}\varphi$, όπου $n = 1,2,3,\ldots$ και $\varphi \in (0, 2\pi)$.

    I) Να δειχθεί ότι τα ηλεκτρόνια διαγράφουν κύκλους, των οποίων να καθοριστούν το κέντρο και η ακτίνα.

    II) Να δειχθεί ότι οι κύκλοι αυτοί δεν έχουν κοινό σημείο.

    III) Να εξετασθεί αν ο κύκλος, που αντιστοιχεί στην τιμή $n=10$ τέμνει την ευθεία $\chi+\psi-1=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Α. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,2)$ $\quad \kappa\alpha\iota \quad$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,0)$ με Ο την αρχή των αξόνων. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Α, που διέρχεται από το Β.

   Β. Δίνονται οι γραμμές με εξισώσεις :
   $(C_1): \chi^2+\psi^2+2\alpha\chi+\alpha\beta=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad (C_2): \chi^2+\psi^2+2\beta\chi+\alpha\beta=0 \quad \mu\varepsilon \quad \alpha\beta<0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
   α) Να αποδείξετε ότι οι γραμμές είναι κύκλοι
   β) Να βρείτε τα κέντρα τους Κ, Λ και τις ακτίνες τους
   γ) Να αποδείξετε ότι τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β , τα οποία και να βρείτε
   δ) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{K}_1\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}_2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{K}_1\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}_2$ είναι ορθές.

2. Α. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α (-α ,0) και Β (α ,0) και το μεταβλητό σημείο Μ (χ ,ψ) του επιπέδου, τέτοιο ώστε $\lambda_{\overline{\mathrm{MA}}}\cdot\lambda_{\overline{\mathrm{MB}}}=1$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ.

   Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο Α (2, 0) και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο με εξίσωση $\chi^2+\psi^2+4\chi=0$

3. Α. Δίνεται η υπερβολή $\dfrac{\chi^2}{16}-\dfrac{\psi^2}{9}=1$. Αν οι εφαπτόμενές της στις κορυφές Α και Α΄ τέμνουν την ασύμπτωτη με θετικό συντελεστή διεύθυνσης στα σημεία Γ , Γ΄:
   α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Γ΄
   β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο Γ Γ΄
   γ) Να δείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\dfrac{\chi^2}{169}+\dfrac{\psi^2}{144}=1$.

   Β. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις :
   $(\kappa_1): (\chi-2\alpha)^2+(\psi+3\alpha)^2=\alpha^2+15 \quad \kappa\alpha\iota \quad (\kappa_2): (\chi+3)^2+(\psi+3)^2=\alpha^2$
   και η ευθεία με εξίσωση : $(\varepsilon): 3\chi-4\psi+2\alpha=0$, $\alpha>0$.
   α) Να βρείτε τις αποστάσεις των κέντρων των κύκλων από την ευθεία ως συνάρτηση του α
   β) Να βρείτε το α αν η ευθεία εφάπτεται του πρώτου κύκλου
   γ) Για την τιμή του α που βρήκατε, να εξετάσετε αν η ευθεία εφάπτεται στον δεύτερο κύκλο και στη συνέχεια βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

4. Δίνονται οι γραμμές με εξίσωση : $(\kappa_\lambda): \chi^2+\psi^2-2\lambda\chi-8\lambda\psi+17\lambda^2-9=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$
   α) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό λ , οι γραμμές παριστάνουν κύκλους, οι οποίοι είναι όλοι ίσοι
   β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων
   γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι εφάπτονται δύο ευθειών, των οποίων τις εξισώσεις να βρείτε.

5. Δίνεται η έλλειψη $c: \chi^2 + \frac{\psi^2}{2} = 1$ *και η ευθεία* $\varepsilon: \psi = \lambda\chi + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   α) Να δείξετε ότι η ευθεία τέμνει πάντα την έλλειψη σε δύο σημεία
   β) Αν Κ, Λ τα κοινά σημεία της ε με την c, να βρείτε την εξίσωση της ε, όταν $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Lambda = 90^{\circ}$.

6. Α. Θεωρούμε την παραβολή c: $\psi^2 = 5\chi$ και το σημείο Μ (2,-3) .
   α) Να δείξετε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο της παραβολής
   β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει την παραβολή στα σημεία Α, Β και το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.
   Β. Δίδεται η παραβολή $\psi^2 = 8\chi$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της παραβολής, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία με εξίσωση ε: ψ = 2 χ +3.

7. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ. Στο Ο έχουμε τοποθετήσει έναν προβολέα και στο σημείο Α (2, 1) ένα εμπόδιο. Φωτίζουμε το Α και το φως ανακλώμενο τέμνει τον άξονα χ΄χ στο Β και σχηματίζει με τον χ΄χ γωνία 135°. Να βρείτε:
   α) Το σημείο Β
   β) Το σημείο Μ της ΑΒ που δέχεται τον ισχυρότερο φωτισμό
   γ) Τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΟΜΒ.

8. Θεωρούμε τα σημεία Μ (λ, μ) και τις ευθείες :
   $$\varepsilon_1: \mu\chi - (\lambda+5)\psi + 5\mu = 0 \ , \quad \varepsilon_2: \mu\chi + (5-\lambda)\psi - 5\mu = 0 \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
   Αν οι ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ.

9. α) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+2)\chi^2 + 3\lambda\psi^2 - 6\lambda\chi + 3\lambda\psi + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).
   Για ποιο λ η (1) είναι εξίσωση κύκλου;
   β) Θεωρούμε την εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + (\mu-1)\chi + \mu\psi - \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (2).
      ι) Να δείξετε ότι για κάθε μ η (2) είναι εξίσωση κύκλου
      ιι) Οι κύκλοι με εξίσωση την (2) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, από τα οποία το ένα είναι το κέντρο του κύκλου του α) ερωτήματος
      ιιι) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον χ΄χ η κοινή χορδή του β) ερωτήματος.

10. Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο Κ (-1,0) που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   α) Να βρείτε:
      ι) Την εξίσωση του κύκλου
      ιι) Την εφαπτομένη ε του κύκλου στο Α.

   β) Αν η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής, που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιάξονα Οχ, τότε:
      ι) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής
      ιι) Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ, Ν, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΝ.

11. Δίνεται η παραβολή c: $\psi^2 = 2p\chi$, $p > 0$ *και οι ευθείες* $\varepsilon_1 : \psi = \lambda\chi$, $\varepsilon_2 : \psi = -\lambda\chi$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   α) Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνουν την παραβολή σε σημεία Α, Β συμμετρικά ως προς τον χ΄χ
   β) Να βρείτε το λ, όταν η ΑΒ διέρχεται από την εστία της c.
   γ) Όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ γίνεται μέγιστο, να αποδείξετε ότι οι ευθείες είναι κάθετες. (Ο η αρχή των αξόνων)

12. Δίνεται η έλλειψη $c : \dfrac{\chi^2}{25} + \dfrac{\psi^2}{9} = 1$ *και η ευθεία* $\varepsilon : \chi = \dfrac{25}{4}$.
   α) Να αποδείξετε ότι η ε δεν έχει κοινά σημεία με την c.
   β) Ευθεία ζ με συντελεστή διεύθυνσης λ, διέρχεται από την εστία Ε (γ, 0) της έλλειψης και τέμνει την ε στο σημείο Μ. Η Β (0,β) είναι μία κορυφή της c. Να βρείτε το λ, όταν:
      ι) Ο κύκλος με διάμετρο ΒΜ διέρχεται από το Ε.
      ιι) Ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ διέρχεται από το Β.
      ιιι) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα λ, των παραπάνω ερωτημάτων
      ιv) Αν η ευθεία ζ τέμνει την ευθεία ε, στην περίπτωση (ι) στο σημείο Κ και στην περίπτωση (ιι) στο σημείο Λ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΚΛ.

13. Τα σταθερά σημεία Ε΄ , Ε είναι σημεία του χ΄χ , συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, με $(\mathrm{E'E}) = 2\sqrt{5}$. Σημεία Μ του επιπέδου ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sqrt{\left[(\mathrm{ME'}) - (\mathrm{ME})\right]^2} = 4 \quad (1) \quad \textit{και} \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{ME'}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{ME}}^2\right| = 24 \quad (2)$$

   α) Να δείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε δύο κωνικές τομές, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
   β) Αν $\mathrm{M}(\chi_0, \psi_0)$ *να δείξετε ότι* $\chi_0^{\,2} = 9\psi_0^{\,2}$.

14. Κύκλος c έχει το κέντρο του στον θετικό ημιάξονα Οχ και η ακτίνα του είναι ρ.
   Η ευθεία ε: ψ = 2 χ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής $c_1 : \dfrac{\chi^2}{\rho^2} - \dfrac{\psi^2}{16} = 1$ και εφάπτεται του κύκλου c.
   Να βρείτε τις εξισώσεις των c , c_1 και τα κοινά τους σημεία.

15. Δίνεται η εξίσωση : $\chi^2 + (\lambda - 1)\psi^2 = \lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).
   α) Για τις διάφορες τιμές του λ, να βρείτε το είδος της γραμμής που εκφράζει η (1).
   β) Στην περίπτωση που η (1) είναι εξίσωση υπερβολής, να βρείτε την εξίσωσή της και το εμβαδόν του ορθογωνίου της βάσης, όταν οι ασύμπτωτες σχηματίζουν γωνία 60° .

16. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{M}(1 + \eta\mu\phi, 2 - \sigma\upsilon\nu\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$.
   α) (*) Να αποδείξετε ότι τα σημεία κινούνται σε κύκλο με εξίσωση : $(\chi - 1)^2 + (\psi - 2)^2 = 1$
   β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου, που άγονται από το Ο (0,0) προς τον κύκλο
   γ) Αν Α, Β τα σημεία επαφής, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{KA}},\overrightarrow{\mathrm{KB}}}\right)$ και στη συνέχεια το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ
   δ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή Ο (0,0), άξονα συμμετρίας τον χ΄χ και εστία το σημείο τομής της ευθείας ΑΒ με τον χ΄χ.

17. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: \chi^2 - \psi^2 = 16$ με εστίες στον άξονα χ΄χ.
   α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, που διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής
   β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c΄), στο σημείο του Γ με τετμημένη $\chi_1 = 2$ και τεταγμένη $\psi_1 > 0$.
   γ) Έστω Μ το σημείο τομής της εφαπτομένης του κύκλου στο Γ με τον άξονα χ΄χ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στον ψ΄ψ, που τέμνει τον ένα κλάδο της υπερβολής στα σημεία Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΔΕ διέρχεται από το Γ.

18. Δίνονται τα διανύσματα : $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} = (\chi - 1, 2\chi - 4)$ $\kappa\alpha\iota$ $\overrightarrow{\text{ΟΔ}} = (\chi - 2, \chi - 3)$, $\chi \in \mathbb{R}$.
   Α. Να βρείτε το χ, ώστε $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} \perp \overrightarrow{\text{ΟΔ}}$
   Β. Για τη μεγαλύτερη τιμή του χ, που βρήκατε προηγουμένως,
      ι) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο τη ΓΔ
      ιι) να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου στα Γ, Δ
      ιιι) αν Β το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Γ με τον ψ΄ψ και Α το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Δ με τον χ΄χ, να βρεθεί η εξίσωση και η εκκεντρότητα της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων και μία κορυφή στον άξονα ψ΄ψ το Β και μία στον χ΄χ το Α.

19. Δίνεται το σημείο $\text{Ρ}(\chi_0, \psi_0)$.
   α) Αν το σημείο Ρ κινείται σε κύκλο με εξίσωση $c: \chi^2 + \psi^2 = 4$, να δείξετε ότι το σημείο Μ (χ ,ψ) με $\chi = \frac{3}{2}\chi_0$ $\kappa\alpha\iota$ $\psi = \frac{1}{2}\psi_0$, κινείται σε έλλειψη (c΄) της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.
   β) Αν Ε, Ε΄ τα σημεία τομής του κύκλου (c) με τον άξονα χ΄χ, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α (χ ,ψ) του επιπέδου, των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών τους από τα Ε, Ε΄ είναι ίση με 1.
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης του β) ερωτήματος, η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5,1)$.

20. Δίνεται η εξίσωση : $\chi^2 + \psi^2 - 2\lambda\chi + 2(2+\lambda)\psi + 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (1)
   α) Να δείξετε ότι παριστάνει πάντα κύκλο
   β) Για λ = – 2 να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει εστίες τα σημεία στα οποία ο κύκλος τέμνει τον άξονα ψ΄ψ και μήκος μικρού άξονα τη διάμετρο του κύκλου
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα ψ΄ψ, ασύμπτωτη παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, -2)$ και εστιακή απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

21. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = (-6, 8)$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{\beta} = (9, -12)$
   α) Να δείξετε ότι είναι αντίρροπα
   β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει ημιάξονες τα μέτρα των διανυσμάτων και μεγάλο άξονα στον ψ΄ψ
   γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης, που διέρχεται από το σημείο Κ (20,0) και σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα χ΄χ.

22. Δίνονται τα σημεία Α (-1,2), Β (-3,1), Γ (3,-2) και Δ (4,-1).
   α) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$.
   β) Να δείξετε ότι η γραμμή που διαγράφουν τα σημεία Μ (χ ,ψ) του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\Gamma\mathrm{M}}=0$, είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου, που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}=\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

23. Δίνεται σημείο Α(4,0) και ευθεία ε: χ = 1. Σημείο Ρ (χ ,ψ) κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε $\mathrm{PA}'=\mathrm{PA}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$, όπου Α΄ η προβολή του Ρ στην ευθεία ε. Να δείξετε ότι το σημείο Ρ ανήκει σε μια συγκεκριμένη γραμμή, την οποία να ορίσετε, όταν:
   α) θ = 0 και β) θ = π/3

24. Δίνεται η εξίσωση : $\chi^2+\psi^2-2=2\chi\ln\theta+\ln^2\theta+4\ln\theta$, $\theta>0$
   α) Για ποιες τιμές του θ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο; Να βρεθεί το κέντρο και ακτίνα του.
   β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του θ, ώστε η ευθεία (ζ): χ = ψ – 4 να εφάπτεται του κύκλου.

25. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+3=4\psi$ (1)
   α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
   β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
   γ) Θεωρούμε την υπερβολή $\dfrac{\chi^2}{\alpha^2}-\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$ $\mu\varepsilon$ $\beta^2=\alpha^2+2$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι ασύμπτωτες της υπερβολής να είναι οι ευθείες του β) ερωτήματος.

26. Θεωρούμε τον κύκλο $c:\chi^2+\psi^2=4$ *και την ευθεία* $\varepsilon:\psi=2\chi+5$.
   α) Να δείξετε ότι ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινό σημείο.
   β) Από ένα σημείο Μ της ευθείας ε, φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο και ονομάζουμε Α και Β τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι, όταν το σημείο Μ διαγράφει την ευθεία ε, η ευθεία ΑΒ διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.

27. (*) Θεωρούμε την παραβολή $\psi^2=6\chi$ και την ευθεία 2χ – ψ +3 = 0. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της παραβολής, του οποίου η απόσταση από την ευθεία είναι η ελάχιστη δυνατή. Ποια είναι η ελάχιστη αυτή απόσταση;

28. (*) Από ένα σημείο Μ άγονται δύο εφαπτόμενες της έλλειψης $\dfrac{\chi^2}{16}+\dfrac{\psi^2}{4}=1$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής έχει εξίσωση 2 χ – 3 ψ – 4 =0. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

29. Μια ευθεία ε με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda\in\mathbb{R}^*$ στρέφεται γύρω από το σημείο Ρ (2 p, 0) και τέμνει την παραβολή $\psi^2=2p\chi$ στα σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από την κορυφή Ο υπό ορθή γωνία. Συμβαίνει το ίδιο αν η ευθεία δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης;

30. Έστω Α, Β σημεία της παραβολής $\psi^2 = 8\chi$, ώστε η ευθεία ΑΒ να διέρχεται από την εστία της. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα Α, Β είναι κάθετες.

31. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της έλλειψης $c: 4\chi^2 + 9\psi^2 = 36$ η οποία έχει μέσον το σημείο Μ (2,1).

32. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων, που εφάπτονται του άξονα χ΄χ, εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου $c: \chi^2 + \psi^2 = 4$ και βρίσκονται στο 1^o τεταρτημόριο.

33. Δίνονται οι κύκλοι $c_1: \chi^2 + \psi^2 = 1$ *και* $c_2: \chi^2 + \psi^2 - 4\chi = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: \psi = \lambda\chi + \beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
   α) Να βρείτε τις αποστάσεις των κέντρων των δύο κύκλων από την ευθεία
   β) Για ποιες τιμές των λ, β, η ευθεία είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων;
   γ) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων τέμνονται στον άξονα χ΄χ και να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών αυτών.

34. Έστω η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και μια ευθεία ε που διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής και την τέμνει στα σημεία Α, Β. Έστω επιπλέον Γ, Δ οι προβολές των Α, Β πάνω στη διευθετούσα της παραβολής και Μ το μέσο του ΓΔ.
   α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Μ ως συνάρτηση της τεταγμένης του σημείου Α
   β) Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΔΓ
   γ) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΜΒ είναι ορθή και ότι το ΜΕ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΜΒ
   δ) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΓΕΔ είναι ορθή και να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΕ συναρτήσει της τεταγμένης του Α.

35. Μια μεταβλητή ευθεία $\varepsilon: \psi = \lambda\chi + \beta$, $\lambda \neq 0$ τέμνει την παραβολή $c: \psi^2 = 4\chi$ στα σημεία Α, Β.
   α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι: $\left(\dfrac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \dfrac{2}{\lambda}\right)$
   β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία κινείται το Μ, όταν:
      ι) λ = 1 και το β μεταβάλλεται
      ιι) β = 0 και το λ μεταβάλλεται.

36. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α (0,1) και εφάπτεται της παραβολής $c: \psi = \chi^2$ στο σημείο Β (2,4). (Δηλαδή έχει με την παραβολή στο σημείο Β την ίδια εφαπτομένη).

37. Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$ και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα Α (4,0) και Β (0,4). Αν το σημείο Μ διαγράφει το τμήμα ΑΒ, να βρεθεί το τόξο που διαγράφει το σημείο Μ΄ της ημιευθείας ΟΜ, για το οποίο ισχύει: $(ΟΜ)\cdot(ΟΜ΄) = \rho^2$

38. Δίνονται οι ημιευθείες $\psi = \lambda\chi$ και $\psi = -\lambda\chi$ με $\lambda, \chi > 0$ και μια ευθεία ε η οποία τις τέμνει στα σημεία Α και Β.
   α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β, ως συνάρτηση του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ
   β) Να δείξετε ότι όταν η ευθεία ε κινείται έτσι ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να έχει σταθερό εμβαδόν ίσο με κ^2, τότε το σημείο Μ διαγράφει τον ένα κλάδο μιας υπερβολής.

39. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 2\lambda\chi - 2\lambda\psi = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστεί ο λ, ώστε η ευθεία με εξίσωση $2\chi - \psi + 3 = 0$ να ορίζει πάνω στον κύκλο χορδή, η οποία να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

40. Α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών του κύκλου με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi = 0$, που η μία άκρη τους είναι η αρχή των αξόνων.
   Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών της παραβολής $\psi^2 = 4\chi$, που έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

41. (*) Θεωρούμε ένα τόξο έλλειψης που οι συντεταγμένες των άκρων του είναι Α (16,9) και Β (-16,9). Αν οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά είναι κάθετες, να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

42. Να αποδείξετε ότι η γωνία των ασύμπτωτων μιας υπερβολής με εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$, είναι π/3.

43. Θεωρούμε ένα πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από τον αριθμό $n = 1,2,3,\dots,1999$ και κινείται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Οχψ διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(\chi - 1)^2 + \psi^2 = 2n(\chi + \psi - 1)$
   Να αποδείξετε ότι:
   α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του
   β) κατά τη κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους) και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του Α
   γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας ε: $\chi = \psi - 1 = 0$ στο σημείο Α.

(Εξετάσεις 1999 – ΘΕΜΑ 4^o)

44. Α. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + 6\mu\chi + 8\lambda\psi = 0$, *όπου* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.Να δείξετε ότι για κάθε τιμή των λ, μ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

   Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.
   α) Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + 6\mu\chi + 8\lambda\psi = 0$ για τις διάφορες τιμές των λ, μ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
   β) Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $\chi + \psi + 2 = 0$, να ισχύει ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
   γ) Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

(Εξετάσεις 2001 – ΘΕΜΑ 4^o)

45. Δίνεται παραβολή με εξίσωση $\psi^2 = 4\chi$. Να βρείτε:
   α) Την εστία Ε και την διευθετούσα της δ
   β) Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία Ε και απέχουν από το Ο (0,0) απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής, που είναι παράλληλη στην ευθεία ψ = χ – 1.

(Εξετάσεις 2002 – ΘΕΜΑ 3^o)

46. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi\sigma\upsilon\nu\theta - 2\psi\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$
   α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του θ η εξίσωση είναι κύκλος και να βρείτε το κέντρο του Κ και την ακτίνα του ρ
   β) Αν θ = π/2, βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Μ (1,2)
   γ) Να δείξετε ότι για κάθε θ, τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο (0,0) και ακτίνα ρ = 1.

(Εξετάσεις 2002 – ΘΕΜΑ 4^o)

47. Δίνονται δύο κωνικές τομές :
   η παραβολή $\psi^2 = 2p\chi$ και η έλλειψη $4\chi^2 + 2\psi^2 = 3p^2$, $p > 0$.
   α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $\mathrm{E}\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ *και* $\mathrm{E}'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.
   β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών, είναι τα σημεία $\mathrm{K}\left(\frac{p}{2}, p\right)$ *και* $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$
   γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

(Εξετάσεις 2003 – ΘΕΜΑ 4^o)

48. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Οχψ με Μ (χ ,ψ) παριστάνουμε τα σημεία μιας περιοχής.
   Στο Κ (12,6) είναι τοποθετημένος ένας πομπός κινητής τηλεφωνίας.
   Η λήψη σε ένα σημείο της περιοχής θεωρείται “ πολύ καλή ”, αν αυτό βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο που ορίζεται από τον κύκλο c_1, ο οποίος έχει κέντρο το Κ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{10}$, ενώ η λήψη θεωρείται “ καλή ”, αν το σημείο είναι εξωτερικό του c_1 και εσωτερικό του κύκλου c_2, που γράφεται με κέντρο Κ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.
   α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κύκλων
   β) Να εξετάσετε αν η λήψη στα σημεία Α (10,7) και Β (9,4) είναι “ καλή ” ή “ πολύ καλή ”
   γ) Ένας αυτοκινητόδρομος της περιοχής (θεωρούμενος ως ευθεία) έχει εξίσωση χ – ψ – 1 = 0. Να εξετάσετε αν υπάρχει τμήμα του αυτοκινητόδρομου, στο οποίο η λήψη είναι: “ καλή ” ή “ πολύ καλή ”.

(ΘΕΜΑ 4^o Προσομοίωσης)

49. Έστω ν θετικός ακέραιος.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \geq 2$ *είναι* $2^{\nu} > 3\nu - 5$

Β. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{\chi^2}{2^{\nu}} - \dfrac{\psi^2}{5-3\nu} = 1$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α) Για $\nu = 1$ η εξίσωση (1) παριστάνει ισοσκελή υπερβολή. Να βρείτε τις εστίες της και να γράψετε την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της.

β) Για κάθε $\nu \geq 2$ η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη που οι εστίες της βρίσκονται στον χ΄χ.

(ΘΕΜΑ 2^o Προσομοίωσης)

50. Να σχεδιάσετε τον κύκλο C , που έχει κέντρο το σημείο Κ (0,1) και ακτίνα ρ = 2. Δίδεται επίσης σημείο Μ (α ,β) εσωτερικό του κύκλου C.

Α. Να αποδείξετε ότι:

(ι) Οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν τη σχέση: $\chi^2 + \left(\psi - 1\right)^2 < 4$

(ιι) Η ευθεία χ = 2 εφάπτεται στον κύκλο C

Β. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda^2(\chi - 2) + 2\lambda(\psi - 1) - \chi - 2 = 0$ (1), *όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$

(ι) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία

(ιι) Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{N}\left(\chi_0, \psi_0\right)$ *με* $\chi_0 \neq 2$, τα οποία δεν ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση της μορφής της (1). Να βρείτε το γεωμετρικό τους τόπο.

(ΘΕΜΑ 3^o Προσομοίωσης)

51. Η πίστα ενός παγοδρομίου είναι εφοδιασμένη με ένα σύστημα αξόνων Οχψ. Δύο παγοδρόμοι Μ και Ν κινούνται πάνω στην πίστα. Η πορεία του παγοδρόμου Μ είναι η ευθεία ε: χ – ψ + 4α = 0 , ενώ οι συντεταγμένες του παγοδρόμου Ν (χ ,ψ) ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\chi = \alpha t^2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \psi = 2\alpha t \;\; \mu\varepsilon \;\; \alpha > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Α. ι) Να αποδείξετε ότι ο παγοδρόμος Ν κινείται σε παραβολή, της οποίας να προσδιορίσετε την παράμετρο, την εστία και τη διευθετούσα.

ιι) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες κάθε σημείου της παραβολής με τη βοήθεια του ψ.

Β. Να αποδείξετε ότι οι δύο παγοδρόμοι δε θα συγκρουστούν.

Γ. Να βρείτε το σημείο της διαδρομής του Ν, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από τη διαδρομή του Μ.

Δ. Να υπολογίσετε την απόσταση αυτή.

52. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ παριστάνει ένα δρόμο που συνδέει τις δύο πλευρές μιας χαράδρας. Ο δρόμος ΑΒ στηρίζεται σε μια γέφυρα ΓΟΔ που έχει το σχήμα παραβολής (Ο το μέσο του ΑΒ, το οποίο αποτελεί το κέντρο των αξόνων, τα σημεία Γ, Δ συμμετρικά του άξονα της γέφυρας ψ΄ψ). Η εστία της παραβολής είναι 20m και απέχει από κάθε πλευρά της χαράδρας 10m.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που παριστάνει τη γέφυρα

β) Να βρείτε πόσο απέχουν τα σημεία στήριξης Γ και Δ της γέφυρας από τον δρόμο ΑΒ

γ) Στο σημείο Α, αρχή του δρόμου υπάρχει ένα αυτοκίνητο. Να βρείτε πόσο απέχει από την εστία της γέφυρας.

δ) Αν μετά τη γέφυρα υπάρχει ένα τούνελ σχήματος ημιέλλειψης, του οποίου το ύψος είναι ίσο με την απόσταση της διευθετούσας της παραβολής ΓΟΔ από το δρόμο ΑΒ και το πλάτος του είναι το μισό του ύψους του, να βρείτε την εξίσωση της ημιέλλειψης που παριστάνει το τούνελ.

53. Για την υπερβολή με εξίσωση $\frac{\psi^2}{\alpha^2}-\frac{\chi^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $\gamma = 2\alpha$.
   α) Να γράψετε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής
   β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία αυτών είναι ίση με 60^o .

54. Δίνονται η ευθεία ε: $5\chi + 3\psi +2 = 0$ και ο κύκλος $c: \chi^2+\psi^2-\chi-2=0$ που τέμνονται στα Μ, Ν.
   α) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ, η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-\chi-2+\lambda(5\chi+3\psi+2)=0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Μ και Ν.
   β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων, που βρήκατε, ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

55. Από το σημείο Μ (-3,-8) φέρουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο $\chi^2+\psi^2+8\chi+2\psi-8=0$.
   Έστω Α, Β τα σημεία επαφής.
   α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων
   β) Να υπολογίσετε τα μήκη των ΜΑ, ΜΒ
   γ) Αν Κ το κέντρο του κύκλου, να δείξετε ότι η ΜΚ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ.

56. Δίδονται δύο κύκλοι που διέρχονται από το σημείο Α (14,2), έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία με εξίσωση $\psi = 1/2\ \chi$ και εφάπτονται στον άξονα χ΄χ. Να βρείτε:
   α) Τις εξισώσεις των δύο κύκλων
   β) Την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης.

57. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος:
   α) Διέρχεται από τα σημεία Ο (0,0) , Α (8,0) και εφάπτεται της ευθείας ε: $\psi = -2$
   β) Εφάπτεται των αξόνων Οχ, Οψ και της ευθείας ε: $3\chi + 4\psi - 12 = 0$

58. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, είναι σταθερός και διάφορος του 1. (Απολλώνιος Κύκλος)

59. Να βρείτε εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ (2,-1), ο οποίος αποκόπτει από την ευθεία με εξίσωση ε: $3\chi - 4\psi + 10 = 0$ χορδή μήκους 6.

60. Από το σημείο Μ (2,3) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ του κύκλου $\chi^2+\psi^2=4$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ.

61. Να βρείτε εξίσωση κύκλου ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες ε: $\chi - 2\psi + 4 = 0$, ζ: $2\chi - \psi - 8 = 0$ και διέρχεται από το σημείο Α (4, -1).

62. Δίνονται αντίστοιχα οι εξισώσεις c, ε: $\chi^2+\psi^2-\lambda\chi-\lambda\psi=0,\ \lambda\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi=\chi+3$.
   α) Να δείξετε ότι η c είναι κύκλος
   β) Να βρείτε τον λ, ώστε η ε να τέμνει τον κύκλο
   γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει λ, ώστε η χορδή που ορίζεται από την τομή της ε και του c, να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

63. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση: $\left(\chi-\frac{|\chi|}{\chi}\right)^2+\left(\psi-\frac{|\psi|}{\psi}\right)^2=9$, $\chi,\psi\neq 0$

64. Α). Δίνεται παραβολή με εξίσωση $c:\psi^2=12\chi$ και το σημείο Μ (3,2)
   α) Να βρεθεί η θέση του Μ ως προς την παραβολή
   β) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το Μ.
   Β). Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $c:\frac{\chi^2}{9}-\frac{\psi^2}{4}=1$ *και το σημείο* $\mathrm{P}\left(\frac{45}{8},\frac{5}{4}\right)$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΜΝ της υπερβολής, η οποία δεν είναι παράλληλη στον ψ΄ψ, που έχει μέσο το σημείο Ρ.

65. Α) Έστω $c:\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$. Α$\nu$ $\mathrm{B\hat{E}'B'}=90^o$ να υπολογίσετε το πηλίκο γ/α.
   Β) Έστω $c:\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$. Να βρείτε το πηλίκο γ/α, αν γνωρίζετε ότι η ασύμπτωτη $\psi=-\frac{\beta}{\alpha}\chi$ σχηματίζει γωνία 120^o με τον άξονα χ΄χ .

66. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, η οποία έχει ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και διέρχεται από το σημείο Μ (3,1).

67. Α) Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής $x^2-\psi^2=1$, που έχουν ελάχιστη απόσταση από το Α(0,1).
   Β) Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής $\chi^2-\psi^2=10$, που έχουν ελάχιστη απόσταση από το Α(0,4)

68. Δίνονται οι κωνικές τομές $c_1:\chi^2+4\psi^2=4$ *και* $c_2:\chi^2-2\psi^2=2$. Να αποδείξετε ότι έχουν τις ίδιες εστίες και ότι τέμνονται κάθετα.

69. Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ σε τυχαίο σημείο της Μ, τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Ν. Αν Σ είναι η προβολή του Μ στον χ΄χ , να δείξετε ότι : $\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}=\alpha^2$

70. Να βρείτε την οξεία γωνία των ασύμπτωτων της υπερβολής $\chi^2-3\psi^2=3\alpha^2$

71. Α). Να βρείτε εξίσωση παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον χ΄χ, όταν:
   α) έχει εστία : ι) Ε (2,0) και ιι) Ε (-2,0)
   β) έχει διευθετούσα : ι) χ = 1 και ιι) χ = -3
   γ) διέρχεται από το σημείο Α (1,6)
   Β). Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων, η οποία διέρχεται από τα σημεία Α (-2,6) και Β (2,6).

72. Δίνεται η παραβολή $c:\psi^2=2\rho\chi$ και η ευθεία (ε) που διέρχεται από την εστία Ε και δεν είναι παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ. Αν η (ε) τέμνει την (c) στα σημεία $\mathrm{M}_1(\chi_1,\psi_1)$ *και* $\mathrm{M}_2(\chi_2,\psi_2)$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
   ι) $\chi_1+\chi_2$ *ιι)* $\chi_1\chi_2$ *ιιι)* $\psi_1+\psi_2$ *ιν)* $\psi_1\psi_2$

73. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 2\rho\chi$ και έστω τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ που είναι εγγεγραμμένα στην παραβολή (Ο η αρχή των αξόνων, $\hat{O} = 90^o$).Να δείξετε ότι οι υποτείνουσες ΑΒ των τριγώνων διέρχονται από σταθερό σημείο, που βρίσκεται πάνω στον άξονα της παραβολής.

74. Να εγγράψετε τετράγωνο στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{\chi^2}{25} + \frac{\psi^2}{9} = 1$.

75. Να βρείτε σημείο Μ της έλλειψης $\frac{\chi^2}{16} + \frac{\psi^2}{4} = 1$, *ώστε* $E'\hat{M}E = 90^o$.

76. Δίνεται η έλλειψη $c: \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$. Τυχαία ευθεία (ε) διέρχεται από την εστία Ε΄ και τέμνει τη (c) στα σημεία Μ και Ν. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΕ έχει σταθερή περίμετρο.

77. Α) Δύο παράλληλες ευθείες τέμνουν μια έλλειψη. Να δείξετε ότι τα μέσα των χορδών που ορίζονται και το κέντρο της έλλειψης είναι συνευθειακά σημεία.

Β) Ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή $c: \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ στα σημεία Μ, Ν και τις ασύμπτωτές της στα σημεία Ρ, Σ. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ και ΡΣ έχουν το ίδιο μέσο.

78. Α). Να βρείτε εξίσωση υπερβολής με εστίες στον άξονα ψ΄ψ και κέντρο την αρχή των αξόνων, η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $\psi = \pm\frac{2}{3}\chi$

Β). Ομοίως, όταν έχει ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και διέρχεται από το σημείο Μ (3,1).

79. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 12\chi$. Να βρείτε τα α, β ώστε η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ να έχει μια εστία που να συμπίπτει με την εστία της παραβολής και να διέρχεται από το σημείο Μ (0,4).

80. Η ευθεία (ε): ψ = m x +c, τέμνει την υπερβολή c: $\frac{\chi^2}{4} - \psi^2 = \lambda$ σε δύο σημεία Α και Β.

α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι ανεξάρτητες του λ.
β) Αν Μ (6,2), να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

81. Δίνονται οι υπερβολές $c_1: \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ *και* $c_2: \frac{\psi^2}{\beta^2} - \frac{\chi^2}{\alpha^2} = 1$ (συζυγείς). Να δείξετε ότι για τις εκκεντρότητές τους ικανοποιείται η σχέση: $\varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} = \varepsilon_1^{\,2} \cdot \varepsilon_2^{\,2}$

82. Έστω έλλειψη $c: \chi^2 + 5\psi^2 = 9$ και η ευθεία (ε) 2 χ +5ψ = 20. Να βρείτε το σημείο της (c), που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία (ε).

83. Δίνονται τα μεταβλητά σημεία Α και Β, που κινούνται πάνω στους άξονες Οχ, Οψ αντίστοιχα, ώστε ΟΑ + ΟΒ = 2. Να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΑΒ διέρχεται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρείτε.

84. Έστω ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=6$. Να βρεθεί σημείο Ρ του κύκλου, στο 1ο τεταρτημόριο, ώστε η εφαπτόμενη του κύκλου στο Ρ να τέμνει τους ημιάξονες Οχ, Οψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{PB}}$.

85. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $c:\chi^2+\psi^2=10$ και η ευθεία ε: ψ = 2 χ. Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου και $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3$ οι προβολές του Ρ στις ευθείες χ΄χ, ψ΄ψ, ε αντίστοιχα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ είναι σταθερό.

86. Έστω ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=25$ και το σημείο του Α (3,4). Αν Μ μεταβλητό σημείο του κύκλου και το σημείο Ρ της ΑΜ ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=16$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ρ. (Υπόδειξη: $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, A_1 αντιδιαμετρικό σημείο του Α)

87. Να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι πραγματικοί Α, Β, Γ, ώστε ο κύκλος

$$c:\chi^2+\psi^2+\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0$$

α) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων
β) να έχει το κέντρο του: ι) στον ψ΄ψ , ιι) στην ευθεία ψ = χ
γ) να εφάπτεται ταυτόχρονα στους δύο άξονες
δ) να έχει ακτίνα ίση με 1
ε) Αν $\mathrm{A}^2-4\Gamma>0$, να δείξετε οτι ο (c) τέμνει τον χ΄χ σε δύο σημεία Κ, Λ, και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\left|\overline{\mathrm{K}\Lambda}\right|$.

88. Δίνονται τα σημεία $(\chi,\psi)=(2\rho\kappa^2,2\rho\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων
β) Αν $\mathrm{A}(2\rho\kappa^2,2\rho\kappa)$, $\mathrm{B}(2\rho\lambda^2,2\rho\lambda)$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ είναι δύο σημεία της προηγούμενης καμπύλης, να δείξετε ότι αν η ευθεία ΑΒ διέρχεται από την εστία της, τότε: $4\cdot\kappa\cdot\lambda=-1$
γ) Αν ΟΒ, ΟΓ είναι δύο χορδές της καμπύλης του α) ερωτήματος, ώστε η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=90^\circ$,να δείξετε ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

89. Α. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Μ της παραβολής $\psi^2=2\rho\chi$ τέμνει τον χ΄χ στο σημείο Τ. Αν Η είναι η προβολή του Μ πάνω στον χ΄χ, να δείξετε ότι ΟΤ = ΟΗ.
Β. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες από οποιοδήποτε σημείο της διευθετούσας της παραβολής $\psi^2=2\rho\chi$, είναι κάθετες μεταξύ τους.

90. Α. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κύκλων, που εφάπτονται στον κύκλο με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=25$ στο σημείο Α (3,4) και έχουν ακτίνα 10.
Β. Σημείο Μ κινείται έτσι ώστε, το μήκος της εφαπτομένης από το σημείο αυτό προς τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=9$ να ισούται με την απόσταση του από το σημείο Α (6,6). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ.

91. Δίνεται ο κύκλος $c:\chi^2+\psi^2=8$ και το σημείο Ρ (ημθ, 4 – συνθ), όπου θ πραγματικός αριθμός.
α) Να δείξετε ότι το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του (C) για κάθε θ.
β) Αν ΡΑ, ΡΒ είναι οι εφαπτόμενες από το Ρ προς τον κύκλο, να βρεθεί η ευθεία ΑΒ
γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων Ρ.

92. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ (3,2) , ακτίνα ρ = 2 και το σημείο του Α (5,5).
   α) Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται του άξονα χ΄χ
   β) Να δείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου και να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου, που άγονται από το Α.
   γ) Αν ΑΒΓ είναι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις παραπάνω εφαπτόμενες και τον άξονα χ΄χ, να βρείτε τα σημεία στα οποία οι διχοτόμοι των οξειών γωνιών του ΑΒΓ τέμνουν τις απέναντι πλευρές του.
   δ) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο παραπάνω διχοτόμοι.

93. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-6\chi+4\psi+\kappa=0$, $\kappa\in\mathbb{R}$.
   α) Να υπολογίσετε το κ, ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο C
   β) Να υπολογίσετε το κ, ώστε ο C να έχει ακτίνα ρ = 1
   γ) Αν Μ (4,2), να δείξετε ότι το Μ είναι εξωτερικό σημείο του C, για την τιμή του κ που προσδιορίσατε στο (β) ερώτημα
   δ) Να δείξετε ότι από το Μ άγονται δύο εφαπτόμενες του C
   ε) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της οξείας γωνίας των δύο αυτών εφαπτόμενων.

94. α) Να δείξετε ότι το σημείο $\mathrm{M}\left(2t^2,4t\right)$, $t\in\mathbb{R}$ κινείται σε παραβολή C, της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση, την εστία και τη διευθετούσα.
   β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ της παραβολής C, που έχει ως μέσο το σημείο Ν (2,-1).
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C, που είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ.

95. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του λόγου $\dfrac{\psi}{\chi}$ όλων των σημείων του επιπέδου, που ικανοποιούν την εξίσωση: $(\chi-3)^2+(\psi-3)^2=6$.

96. Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε), ώστε το σημείο να μην ανήκει σε αυτήν. Είναι ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που περνούν από το Α και εφάπτονται στην (ε) είναι παραβολή;

97. Δίνεται η υπερβολή $\upsilon:\dfrac{\chi^2}{16}-\dfrac{\psi^2}{9}=1$ και ένα τυχαίο σημείο της $\mathrm{M}\left(\chi_1,\psi_1\right)$ διαφορετικό από τις κορυφές της. Έστω ευθεία (ε΄) κάθετη στην εφαπτομένη της υπερβολής (υ) στο Μ και Γ, Δ τα σημεία τομής της (ε΄) με τους άξονες χ΄χ, ψ΄ψ αντίστοιχα.
   α) Να βρείτε την εξίσωση της (ε΄), αν θεωρήσουμε ως γνωστό το σημείο Μ.
   β) Να βρείτε τα σημεία Γ, Δ.
   γ) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Ν της ΓΔ, είναι μία υπερβολή (υ΄).
   δ) Να δείξετε ότι οι υπερβολές (υ) και (υ΄) έχουν ίδια εκκεντρότητα.

98. Α) Δίνεται ευθεία (ε): χ – ψ + λ = 0 και σημείο $\mathrm{M}\left(\lambda^2,0\right)$. Να δείξετε ότι το συμμετρικό του Μ ως προς την (ε) κινείται σε παραβολή.
   Β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\mathrm{M}\left(4\varepsilon\varphi\theta,\dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$, $0\le\theta<2\pi$, $\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$

99. Α) Η εφαπτομένη της $\Pi_1 : \psi^2 = -4\chi$ σε σημείο της Ρ, εκτός της κορυφής της, τέμνει την $\Pi_2 : \chi = \dfrac{\psi^2}{8}$ στα σημεία Α, Β. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της ΑΒ, είναι παραβολή.

Β) Δίνεται κύκλος με εξίσωση $C : (\chi + 3)^2 + \psi^2 = 100$
Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που εφάπτονται εσωτερικά στον (C) και διέρχονται από το σημείο Λ (3,0), είναι έλλειψη.

Γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων η απόσταση από την ευθεία με εξίσωση $2\chi - 8 = 0$, είναι διπλάσια από την (ΜΕ), όπου Ε (1,0).

100. (*) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $4\chi^2 + \psi^2 = 4$

α) Αν η ευθεία $\psi = m x + c$ εφάπτεται της έλλειψης, να δείξετε ότι: $m^2 + 4 = c^2$

β) Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης που άγονται από το σημείο $\mathrm{P}(\chi_1, \psi_1)$ έχουν εξίσωση $\psi = m x + c$ να δείξετε ότι ισχύει: $(1 - \chi_1^2)m^2 + 2\chi_1\psi_1 m + 4 - \psi_1^2 = 0$

γ) Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης που άγονται από το σημείο Ρ είναι κάθετες μεταξύ τους, να δείξετε ότι το σημείο Ρ ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 = 5$.

101. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$.

α) Αν $\mathrm{M}_1(\chi_1, \psi_1)$, $\mathrm{M}_2(\chi_2, \psi_2)$ είναι δύο σημεία της, τέτοια ώστε $\psi_1 + \psi_2 = 4\sqrt{3}$, να δείξετε ότι:

ι) η ευθεία $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα χ΄χ

ιι) το μέσο Μ του τμήματος $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ κινείται παράλληλα προς τον άξονα Οχ

β) Να δείξετε ότι μια ευθεία είναι εφαπτόμενη της παραβολής, αν έχει εξίσωση της μορφής

$$(\varepsilon) : \ \psi = mx + \frac{1}{m}$$

γ) Ποια μορφή πρέπει να έχουν οι εξισώσεις δύο εφαπτόμενων της παραβολής που είναι κάθετες μεταξύ τους;